Министерство образования и науки РФ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ»

МЕХАНИКА

Методические указания
к самостоятельной работе
и индивидуальным заданиям по физике

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2004

УДК 531+537 (079)

Механика: Методические указания к самостоятельной работе и индивидуальным заданиям по физике / Сост.: Ю. Е. Зайцев, А. М. Альтмарк, И. А. Черемухина, А. Г. Клименков; Под ред. А. И. Мамыкина. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2004. 24 с.

Содержат указания к выполнению индивидуальных заданий по курсу «Общая физика», раздел «Механика». Помимо индивидуальных заданий представлены задания для проверки теоретической подготовки студентов и контрольные вопросы.

Предназначено для студентов 1-го курса всех факультетов.

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний

Предисловие

Настоящие методические указания составлены в соответствии с программой курса физики для технических университетов. Материал представленных заданий соответствует рабочей программе курса.

Вопросы и задания к каждому занятию разбиты на четыре группы (задания). Подготовительные задания очерчивают минимальный круг необходимых физических и математических понятий. Теоретические задания имеют целью повысить ритмичность проработки и усвоения теории в течение семестра. Индивидуальные задания построены по принципу варьирования объектов при единстве постановки задачи. Такая структура, с одной стороны, делает возможным использование фронтальной методики и коллективное обсуждение узловых моментов решения, с другой – не позволяет тривиально трансформировать варианты решений. Контрольные задания предназначены для контроля и самоконтроля усвоения материала.

Занятие 1. **КИНЕМАТИКА**

1.1. Подготовительные задания

1. Что такое производная и первообразная функции? Поясните геометрический смысл этих понятий. Какие свойства производной вы знаете? Что можно сказать о функции, если ее производная равна нулю? Какое свойство следует из непрерывности производной? Можно ли судить о возрастании или убывании функции по графику ее производной? Как вычислить производную сложной функции, суммы функций, произведения функций? Чему равны производные функций x^n , $\sin x$, $m \cos nx$, e^{nx}? Что такое определенный и неопределенный интегралы?

Как выразить вектор через его проекции на координатные оси и орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$? Как найти сумму, разность, скалярное и векторное произведения произвольных векторов графически? Как проделать то же самое аналитически, если известны проекции векторов?

2. Что такое система отсчета, материальная точка, радиус-вектор $\vec{r}$, траектория, перемещение $\Delta\vec{r}$, путь S, средняя $\vec{v}_{\text{ср}}$ и мгновенная $\vec{v}$ скорости, ускорение $\vec{a}$, его нормальная $\vec{a}_n$ и тангенциальная $\vec{a}_\tau$ составляющие, угловые координата $\vec{\varphi}$, скорость $\vec{\omega}$, ускорение $\vec{\varepsilon}$, радиус R кривизны траектории? Укажите размерности и единицы измерения названных выше физических величин.

3. Дайте пояснения к формулам:

$$\vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{j}\,y + \vec{k}\,z, \tag{1.1}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{1.2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \tag{1.3}$$

$$S = \varphi R, \tag{1.4}$$

$$v = \omega R, \tag{1.5}$$

$$a_\tau = \varepsilon R, \tag{1.6}$$

$$a_n = \omega^2 R = v^2 / R, \tag{1.7}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \tag{1.8}$$

$$\Delta\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t)\,dt, \tag{1.9}$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt. \tag{1.10}$$

1.2. Теоретические задания

1. Докажите, что из (1.3), (1.7) и (1.8) следует

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

2. Даны зависимости радиус-векторов от времени:

$$\vec{r}_1(t) = \vec{i}\,At + \vec{j}\,Bt, \text{ где } A = 2 \text{ м/с}, \ B = 3 \text{ м/с},$$

$$\vec{r}_1(t) = A\ \left(\vec{i}\sin\omega t\ + \vec{j}\cos\omega t\ \right),\ \text{где}\ \ A = 2\ \text{м}\ ,\ \omega = 3\,\text{с}^{-1}.$$

Исключив параметр времени, получите уравнения траекторий.

3. Докажите, что все тела по отношению к различным инерциальным системам отсчёта движутся с одинаковыми ускорениями.

1.3. Индивидуальные задания

1. По графической зависимости скорости от времени найдите аналитические зависимости ускорения, скорости и перемещения от времени, за время $\Delta t = t_{\text{к}} - t_{\text{н}}$ (см. табл. 1.1), если движение прямолинейное и начинается в момент времени $t_{\text{н}}$ из начала координат. Зависимость скорости от времени изображена на рис. 1.1 (для N = 1…15) и 1.2 (для N = 16…30).

Примечание. При расчетах после выбора нужного участка зависимости принять $t_н = 0$ с.

Таблица 1.1

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$t_{\text{н}}$, с	0	0	2,5	5	5	10	10	15	15	20	20	25	30	30	30
$t_{\text{к}}$, с	2.5	5	5	7.5	10	12.5	15	20	17.5	25	30	30	37.5	35	40
N	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$t_{\text{н}}$, с	0	5	5	7.5	10	10	15	20	25	30	35	35	25	30	30
$t_{\text{к}}$, с	5	10	7.5	10	15	20	20	25	30	35	40	37.5	27.5	37.5	32.5

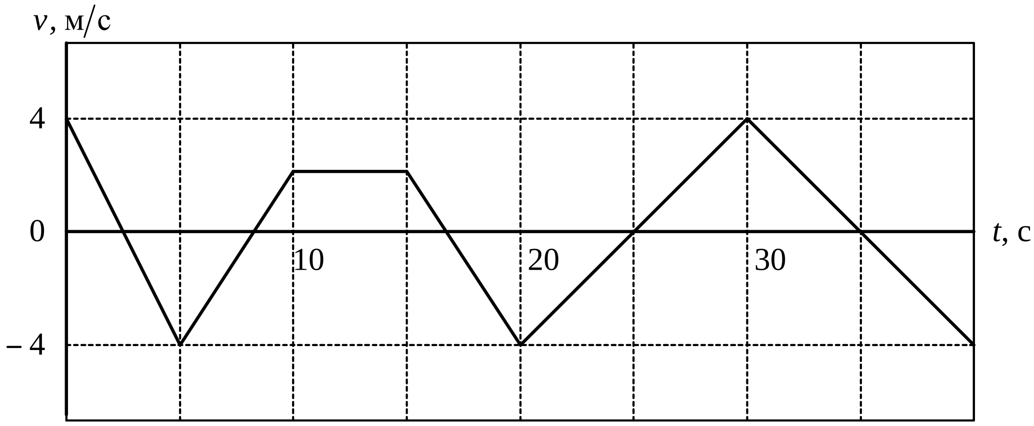


Рис. 1.1

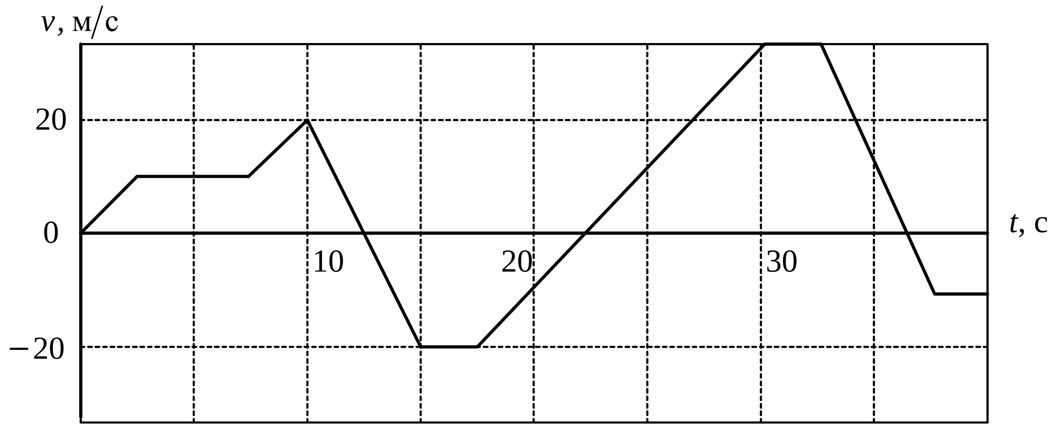


Рис. 1.2

2. Материальная точка движется по окружности радиуса R = 2 м, причем ее линейная скорость зависит от времени так, как показано на рис.1.1, 1.2 за время $\Delta t = t_к - t_н$. Необходимый для расчетов участок выберите из табл. 1.2. Постройте графики $\varphi(t)$, $\omega(t)$, $\varepsilon(t)$, $a_n(t)$, $a_\tau(t)$, $S(t)$.

Примечание. При расчетах после выбора нужного участка зависимости принять $t_н = 0$, тогда $t_к = 0 + \Delta t$.

Таблица 1.2

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$t_н$, с	0	0	0	5	5	10	10	15	15	20	20	25	25	30	30
$t_к$, с	5	10	15	15	20	20	25	25	30	25	30	35	40	35	40
N	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$t_н$, с	0	0	5	5	10	10	10	15	15	15	20	25	30	30	35
$t_к$, с	5	10	10	15	20	25	30	20	25	30	35	35	35	40	40

3. В условиях предыдущей задачи вычислите значения полного ускорения, перемещения и угла между скоростью и полным ускорением через 2 с после начала движения материальной точки.

4. Миномет стреляет с высоты h со скоростью v под углом α к горизонту. Найдите значения нормального и тангенциального ускорений и радиус кривизны траектории через время t_1 после выстрела. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Числовые значения указанных параметров возьмите из табл. 1.3 в соответствии со своим порядковым номером. Считать g = 10 м/с.

Таблица 1.3

N	h, м	v_0, м/с	α,...°	t_1, с	t_2, с
1	0	100	30	2	2.5
2	50	125	45	4	4.2
3	100	150	60	6	5.0
4	0	175	30	4.5	5.5
5	50	200	45	8	4.4
6	100	250	60	7	5
7	0	100	30	2	2.5
8	50	125	45	4	4.2
9	100	150	60	6	5.0
10	0	175	30	4.5	5.5
11	50	200	45	8	4.4
12	100	250	60	7	5
13	0	100	30	2	2.5
14	50	125	45	4	4.2
15	100	150	60	6	5.0
16	0	175	30	4.5	5.5
17	50	200	45	8	4.4
18	100	250	60	7	5
19	0	100	30	2	2.5
20	50	125	45	4	4.2
21	100	150	60	6	5.0
22	0	175	30	4.5	5.5
23	50	200	45	8	4.4
24	100	250	60	7	5
25	0	100	30	2	2.5
26	50	125	45	4	4.2
27	100	150	60	6	5.0
28	0	175	30	4.5	5.5
29	50	200	45	8	4.4
30	100	250	60	7	5

5. В условиях предыдущей задачи определить координаты наивысшей точки траектории движения мины.

1.4. Контрольные задания

1. Могут ли совпадать по направлению векторы $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{a}$; $\vec{\omega}$ и $\vec{a}_{\tau}$; $\vec{V}$ и $\vec{\varepsilon}$; $\vec{a}$ è $\vec{v}$?

2. Через какой промежуток времени совпадают часовая и минутная стрелки часов?

Ответ: 12/11 ч.

3. Во сколько раз нормальное ускорение точки, лежащей на ободе вращающегося колеса, меньше ее тангенциального ускорения для момента времени, когда вектор полного ускорения точки составляет угол 30° с вектором ее линейной скорости?

Ответ: $\sqrt{3}$ раз.

4. Материальная точка движется по окружности радиуса $R = 2$ м. Зависимость угла между радиус-вектором и некоторым выбранным направлением определяется функцией $\varphi(t) = At^2 + Bt + C$, где A = 2 рад/с^2, B = 3 рад/с, C = 1 рад. Определите угловую и линейную скорости, полное, нормальное, тангенциальное, угловое ускорения, путь, угол между линейной скоростью и полным ускорением через 2 с после начала движения.

Ответ: 11 с$^{-1}$; 22 м/с; 242.13 м/с^2; 242 м/с^2; 8 м/с^2; 4 с$^{-2}$; 30 м; $88°$.

5. Две материальные точки 1 и 2 движутся вдоль осей x и y, соответственно, со скоростями $\vec{v}_1 = \vec{i}\,2$ см/с и $\vec{v}_2 = \vec{j}$ см/с. При $t = 0$ с их координаты равны $x_1 = -3$ см, $y_1 = 0$ см; $x_2 = 0$ см, $y_2 = -3$ см. Найдите вектор $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, выражающий положение материальной точки 2 относительно точки 1 как функцию времени. Через какой промежуток времени расстояние между этими точками является минимальным?

Ответ: $\vec{r}_{21} = \left[\vec{i}\,(3-2t) + \vec{j}\,(3t-3)\right]$; 1.15 с.

6. Минометная батарея расположена у подножья горы с наклоном к горизонту 45°. Под каким углом α к горизонту надо установить ствол орудия, чтобы мина достигла склона на максимальной высоте? Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: $3\pi/8$.

Занятие 2. **ДИНАМИКА**

2.1. Подготовительные задания

1. Чему равны первообразные следующих функций: x^2, x^{-1}, $3x^5 + x$, $\sin x$, $2\cos 3x$, $\exp 3x$? Какой смысл приобретает постоянная интегрирования при переходе от неопределённого интеграла к определённому? Как по графику подынтегральной функции и заданным пределам интегрирования можно оценить значение интеграла?

2. Что такое сила $\vec{F}$, инертная и гравитационная массы, импульс $\vec{P}$, состояние системы? Сколько параметров надо знать, чтобы описать состояние материальных точек в приближении классической механики? В каких случаях при описании состояния системы необходимо учитывать релятивистские или квантово-механические эффекты?

Что такое уравнение движения? Приведите пример. Объясните, почему для получения однозначного решения кроме уравнения движения необходимо знать еще и начальные условия.

Что такое момент силы $\vec{M}$, момент импульса $\vec{L}$, момент инерции J? Какая связь между этими величинами? Назовите их единицы измерения. Чему равен момент инерции материальной точки относительно некоторой оси? Чему равны моменты инерции кольца, диска, шара, конуса, стержня относительно их осей симметрии? Как вычислить момент инерции тела, внутри которого есть полость?

Что такое центр масс (центр инерции) тела? Как определить соответствующий ему радиус-вектор $\vec{r}_{\text{c}}$? Пусть известен момент инерции некоторого тела J_0 относительно оси, проходящей через его центр масс. Чему равен момент инерции этого тела относительно оси, проходящей параллельно данной на расстоянии ℓ, если масса тела m? Будет ли выполняться такое же соотношение между моментами инерции, если одна из осей не проходит через центр масс?

3. В табл. 2.1 приведены формулы и параметры, используемые при описании поступательного и вращательного движений. Поясните эти

формулы. Заполните пропущенные места в первом и втором столбцах выражениями из третьего так, чтобы в каждой строке стояла соответствующая величина.

Таблица 2.1

Движение		Формулы и параметры
поступательное	вращательное	
$\vec{r}$	$\vec{\varphi}$	$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$
$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$		$\vec{M}$
	$\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$	$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$
$\vec{F}$		$\vec{L}$
	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$	$\vec{P} = m\vec{v}$
	$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$	$\vec{F} = m\vec{a}$
	$\vec{L} = J\vec{\omega}$	
M	J	

4. Дайте пояснения к формулам:

$$J = \int\limits_m r^2 dm, \tag{2.1}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}, \tag{2.2}$$

$$J = J_0 + m\ell^2, \tag{2.3}$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\int \vec{r} dm. \tag{2.4}$$

2.2. Теоретические задания

1. Докажите теорему Штейнера (2.3), используя определение радиус-вектора центра масс (2.4). Вычислите моменты инерции относительно оси симметрии для сплошных однородных стержня, диска и кругового конуса.

2. Покажите, что моменты инерции полых шара, цилиндра и кругового конуса относительно их осей симметрии вычисляются, соответственно, по формулам.

$$J_{ø} = \frac{2m}{5}\frac{\left(R_1^5 - R_2^5\right)}{\left(R_1^3 - R_2^3\right)}; \tag{2.5}$$

$$J_{ö} = \frac{m\left(R_1^2 + R_2^2\right)}{2}; \tag{2.6}$$

$$J_{ê} = \frac{3m\left(R_1^2 + R_2^2\right)}{10}, \tag{2.7}$$

где m – масса каждого из тел; R_1, R_2 – внешний радиус и радиус полости соответственно.

2.3. Индивидуальные задания

1. Однородный конус с радиусом основания 0.5 м и массой 5 кг вращается вокруг своей оси. На рис. 1.2 приведена линейная скорость концов диаметра основания от времени. Постройте графики зависимостей $M(t)$ и $L(t)$ за время $\Delta t = t_{\text{н}} - t_{\text{к}}$, указанные в условии задания 1.3, п. 2.

2. На рис. 2.1 приведено тело, параметры массы $m = 2$ кг и размера $x = 0.1$ м. Определите положение центра масс и момент инерции этого тела относительно оси z в соответствии со своим номером N (табл. 2.2).

3. В условиях предыдущей задачи тело в момент времени t = 0 с начинает вращаться вокруг фиксированной оси z так, что угол поворота φ центрального стержня изменяется во времени по закону $\varphi(t) = At^3 + Bt^2 + Ct$. Числовые значения коэффициентов A, B, C указаны в табл. 2.2. Определите аналитические зависимости от времени угловых скорости ω и ускорения ε тела, линейных скорости v и ускорения a центра масс тела, вращающего момента M. Вычислите значения этих величин в момент времени t_1 = 2 с.

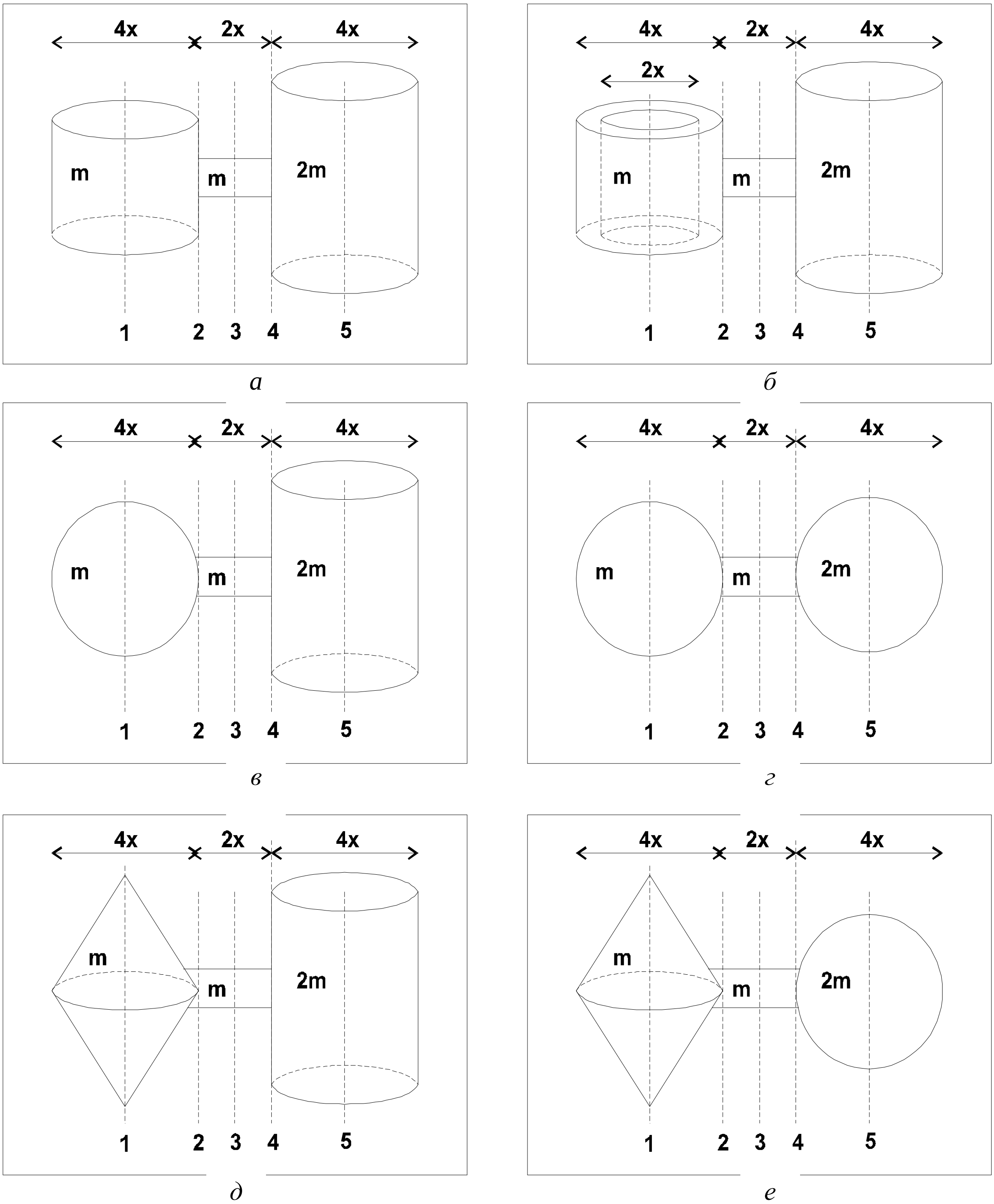


Рис. 2.1

Таблица 2.2

N	z	A, рад·с$^{-3}$	B, рад·с$^{-2}$	C, рад·с$^{-1}$	Рисунок
1	1	0.2	1	10	а
2	2	0.3	2	9	б
3	3	0.4	3	8	в
4	4	0.5	4	7	г
5	5	0.6	5	6	д
6	1	0.2	6	5	е
7	2	0.3	1	4	а
8	3	0.4	2	3	б
9	4	0.5	3	2	в
10	5	0.6	4	1	г
11	1	0.2	5	10	д
12	2	0.3	6	9	е
13	3	0.4	1	8	а
14	4	0.5	2	7	б
15	5	0.6	3	6	в
16	1	0.2	4	5	г
17	2	0.3	5	4	д
18	3	0.4	6	3	е
19	4	0.5	1	2	а
20	5	0.6	2	1	б
21	1	0.2	3	10	в
22	2	0.3	4	9	г
23	3	0.4	5	8	д
24	4	0.5	6	7	е
25	5	0.6	1	6	а
26	1	0.2	2	5	б
27	2	0.3	3	4	в
28	3	0.4	4	3	г
29	4	0.5	5	2	д
30	5	0.6	6	1	е

4. Определите значение внешней силы, которую нужно приложить к центру масс тела, изображенного на рис. 2.1, перпендикулярно плоскости рисунка, чтобы вызвать движение, заданное уравнением в п. 3 данного

задания. Тело может вращаться только относительно оси z. Трение отсутствует.

2.4. Контрольные задания

1. Концы невесомой нерастяжимой нити намотаны на два одинаковых однородных сплошных диска, один из которых имеет фиксированную ось вращения (рис. 2.2, *а*). Второй диск, вращаясь, движется вниз. Найдите ускорение центра масс второго диска.

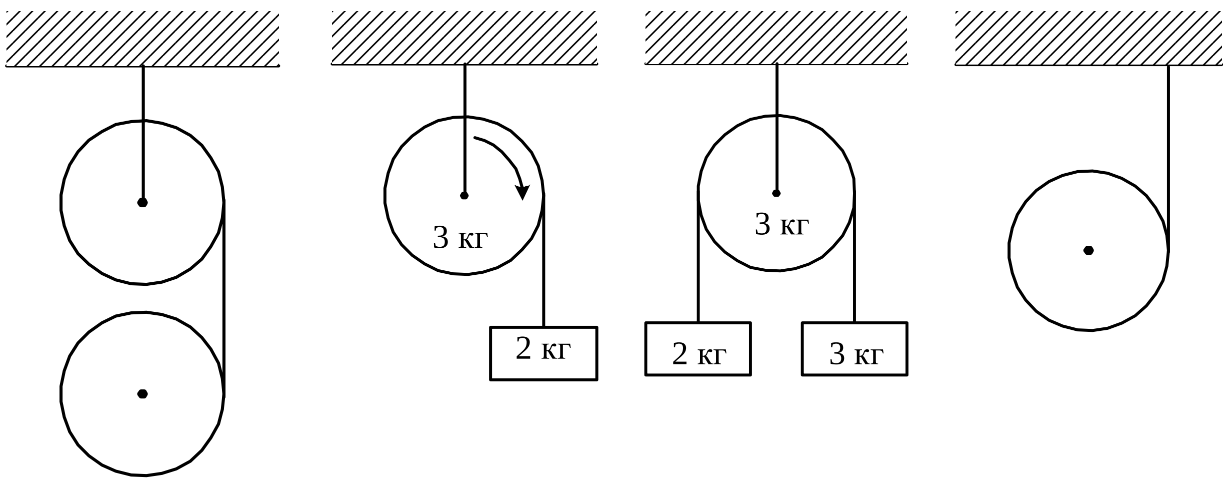
Ответ: 7.8 м/с^2 .

2. На сплошной однородный диск с фиксированной осью вращения намотана невесомая нерастяжимая нить (рис. 2.2, *б*). К концу нити прикреплен груз массой 2 кг. Груз движется вниз, разматывая нить. Найдите ускорение груза, если масса груза 3 кг.

Ответ: 5.6 м/с^2.

3. Через сплошной однородный диск с фиксированной осью вращения (рис. 2.2, *в*) перекинута невесомая нерастяжимая нить. К концам нити прикреплены грузы массами 2 и 3 кг, которые при своем движении заставляют диск вращаться без проскальзывания. Найдите ускорение грузов, если масса диска 3 кг.

Ответ: 2.8 м/с^2.



а *б* *в* *г*

Рис. 2.2.

4. На сплошной однородный диск намотана невесомая нерастяжимая нить, второй конец которой закреплен (рис. 2.2, *г*). С каким ускорением будет опускаться диск, если его предоставить самому себе?

Ответ: 6.5 м/с^2.

5. Круглый металлический обруч массой $m = 1$ кг и радиусом $r = 0.2$ см вращается относительно своего центра с угловой скоростью $\omega = 20\pi$ рад/с. Ось вращения перпендикулярна плоскости обруча. Определить момент инерции относительно оси вращения.

Ответ: 0.04 êã·ì ^{2}

6. Вентилятор вращается с частотой ν = 15 с$^{-1}$. После выключения вентилятор, вращаясь равнозамедленно, сделал до остановки N = 75 об. Работа сил торможения A = 44.4 Дж. Определите момент сил торможения, считая его постоянным.

Ответ: $94 \cdot 10^{-3}$ Н·м.

Занятие 3. **ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ**

3.1. Подготовительные задания

1. Дайте определение частной производной функции. Какой геометрический смысл имеет частная производная от функции двух переменных? Как вычислить значение частной производной в данной точке? Что такое оператор? Каков смысл оператора "градиент"? Как обозначается этот оператор? Как вычислить значение градиента функции трех переменных (координат) в данной точке пространства? Что называется дифференциальным уравнением?

2. Объясните понятия и термины: внутренние и внешние силы, замкнутая и открытая система, импульс p и момент импульса L системы, скорость механической системы как целого, полная энергия системы W, упругий и неупругий удары, центр инерции системы, работа A, потенциальная $W_п$ и кинетическая $W_к$ энергии, консервативные и диссипативные силы, потенциальные и непотенциальные поля, время

релаксации τ. Укажите размерности и единицы измерения перечисленных физических величин.

3. В чем преимущество использования законов сохранения по сравнению с детальным решением уравнения движения?

4. Дайте пояснения к следующим формулам:

$$\vec{p}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \text{const}, \tag{3.1}$$

$$\vec{L}_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} J \vec{\omega}_i = \text{const}, \tag{3.2}$$

$$W_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} (W_{\text{ï}_i} + W_{\text{ê}_i}) = \text{const}, \tag{3.3}$$

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r}, \tag{3.4}$$

$$\vec{F} = -\text{grad} W_{\text{ï}}, \quad F_x = -\frac{\partial W_{\text{ï}}}{\partial x}, \tag{3.5}$$

$$W_{\text{к}} = \frac{m v^2}{2}, \tag{3.6}$$

$$W_{\text{к}_{\Sigma}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m v_i'^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}. \tag{3.7}$$

3.2. Теоретические задания

1. Пользуясь законами Ньютона, докажите, что импульс и момент импульса замкнутой системы есть величины постоянные. Справедливо ли это утверждение, если рассматривается неупругий удар?

2. Выведите формулу Циолковского

$$v = u \ln\left(\frac{m_0}{m} + 1\right), \tag{3.8}$$

которая выражает скорость ракеты v, приобретенную за счет выбрасывания продуктов сгорания топлива со скоростью u через начальную массу ракеты m_0 и массу m, которую она имеет в момент вычисления скорости.

3. Докажите, что всегда можно подобрать такую инерциальную систему отсчета, в которой импульс замкнутой системы будет равен нулю. Покажите, что в этой системе центр масс неподвижен.

4. Докажите, что законы Кеплера получены на основании закона сохранения момента импульса замкнутой системы.

5. Докажите теорему: кинетическую энергию системы тел можно представить в виде суммы двух членов – кинетической энергии материальной точки массой m, равной сумме всех масс m_i тел системы и движущейся как центр масс системы, и кинетической энергии всех тел в системе отсчета, жестко связанной с центром масс (см. (3.7), где v_i – скорость тел относительно центра масс системы).

6. Частица находится в стационарном потенциальном силовом поле. Как связана сила, действующая на частицу в каждой точке этого поля, с потенциальной энергией частицы?

7. Пусть тело движется в вязкой среде под действием силы тяжести, причем сила трения пропорциональна скорости движения $\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{v}$. Покажите, что время релаксации τ равно отношению массы тела к коэффициенту сопротивления среды r, а равновесное значение скорости $v_\infty = g\tau$.

3.3. Индивидуальное задание

1. В центр масс тела (рис. 2.1) попадает пуля массой m_0 = 10 г, летевшая со скоростью $v = 1000$ м/с перпендикулярно плоскости оси вращения z и стержня. С какой угловой скоростью начнет двигаться тело после удара, если до удара оно было неподвижно? Параметры тела и положение оси z выберите из табл. 2.2 в соответствии со своим номером.

2. В условиях предыдущей задачи вычислите, какая часть кинетической энергии пули переходит в тепло.

3. В условиях задачи 1 данного задания вычислите приращение кинетической энергии тела за счет удара пули, если в момент удара тело

вращалось с угловой скоростью $\omega = 2\pi N$. Рассмотрите два направления вращения. Объясните полученный результат.

4. Потенциальная энергия частицы в некотором силовом поле определяется выражением $W_{\text{п}} = a\,f(x,\,y,\,z)$, где a – константа, равная 2 Дж/м^3. Какая сила действует на эту частицу в момент, когда ее координаты равны $x_1,\,y_1,\,z_1$. Вид функции $f(x,\,y,\,z)$ и числовые значения координат указаны в табл. 3.1, соответственно, номеру N.

Таблица 3.1

N	$f(x, y, z)$	x_1, y_1, z_1	N	$f(x, y, z)$	x_1, y_1, z_1
1	$xy^2 + 2z^3$	0, 1, 2	16	$xy^2 + z^3$	1, 1, 3
2	$y^2x + zx^2$	0, 1, 1	17	$zy^2 + 3x^3$	2, 3, 1
3	$2xy^2 + xz^2$	1, 0, 1	18	$y^2x + zx^2$	2, 0, 1
4	$x^2y + y^3$	2, 0, 2	19	$xyz + zx^2$	0, 1, 2
5	$x^2y + 2zx^2$	2, 2, 1	20	$x^3 + 4xy^2$	1, 1, 1
6	$x^2y + 3z^2y$	3, 1, 1	21	$3x^3 + 2z^3$	1, 0, 1
7	$x^2z + 3x^3$	2, 1, 0	22	$x^3 + zy^2$	1, 2, 1
8	$x^2z + 3z^2y$	1, 0, 1	23	$xyz + 2y^3$	1, 1, 2
9	$4x^2z + zy^2$	1, 0, 2	24	$2y^3 + x^2y$	2, 3, 1
10	$2z^2x + yzx$	1, 2, 3	25	$2x^3 + zx^2$	1, 2, 3
11	$y^2x + zy^2$	2, 3, 1	26	$3xy^2 + 2z^3$	2, 3, 2
12	$x^2z + 2zy^2$	1, 1, 1	27	$2y^2x + zx^2$	1, 3, 1
13	$3x^2y + x^3$	1, 1, 2	28	$z^2x + zy^2$	1, 1, 3
14	$3x^2y + xy^2$	2, 2, 2	29	$y^2x + 2xyz$	2, 1, 5
15	$y^2x + xyz$	2, 1, 1	30	$y^3 + zx^2$	1, 1, 3

5. В условиях задания 1.3, п. 4 мина разрывается на два осколка с соотношением масс $1/(N + 2)$ в момент времени t_1 (табл. 1.3). Меньший осколок, вектор скорости которого направлен под углом 180° к вектору скорости мины в момент разрыва, возвращается в точку выстрела. Найдите расстояние от точки выстрела до места падения второго осколка.

6. Определите модуль изменения импульса мины в условиях задания 1.3, п. 4 через время t_2, если известно, что масса мины равна 10 кг.

7. В условиях задания 1.3, п. 4 определите условное место падения центра масс системы осколков, если мина разрывается на $N + 3$ осколка в момент времени t_2 (табл. 1.3).

3.4. Контрольные задания

1. Соударяются две частицы (материальные точки), которые могут двигаться только в горизонтальной плоскости. Начальные данные: $m_1 = 0.085$ кг, $m_2 = 0.2$ кг, $\vec{v}_1 = \vec{i}\,0.064$ м/с, $\vec{v}_2 = \left(\vec{i}\,0.064 - \vec{j}\,0.02\right)$м/с. Определите скорость центра масс $\vec{v}$, общий импульс $\vec{P}$, скорость обеих частиц ($\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$) относительно системы отсчёта, в которой центр масс остается неподвижным.

Ответ: $\left(-\vec{i}\,0.023 - \vec{j}\,0.014\right)$ м/с; $\left(\vec{i}\,0.796 - \vec{j}\,0.4\right)\cdot 10^{-2}$ кг·м/с;

$\left(\vec{i}\,0.092 + \vec{j}\,0.014\right)$ м/с; $\left(\vec{i}\,0.039 - \vec{j}\,0.06\right)$ м/с.

2. Чему равно отношение кинетической энергии вращательного и поступательного движений твердого цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения?

3. Диск и тонкий обруч скатываются без проскальзывания с высоты $h = 0.5$ м по наклонной плоскости, ориентированной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Начальные скорости тел v_0 равны нулю. Найдите линейные скорости v диска и обруча у основания плоскости, ускорения a центров масс диска и обруча, времена скатывания $t_{ск}$. Сравните полученные значения для тела, соскальзывающего с этой наклонной плоскости без трения.

Ответ: 2.56 м/с; 2.21 м/с; 3.27 м/с^2; 2.45 м/с^2; 0.78 с; 0.9 с; 3.13 м/с; 4.9м/с^2; 0,64 с.

4. Решите задания 2.4, п. 1–4, используя закон сохранения энергии.

5. Ангармоничная пружина, упругая сила которой изменяется в зависимости $F = -\eta x^3$, где η – константа, Н/м^3. Чему равна потенциальная энергия этой пружины при растяжении ее на величину x, если при $x = 0$ ее потенциальная энергия равна нулю?

Ответ: $\eta x^4/4$.

6. Вычислите кинетическую, потенциальную и полную энергию спутника массой 500 кг, движущегося по круговой орбите радиусом 6750 км, если момент импульса спутника $L = 2.7\cdot 10^{13}$ кг·м^2/с.

Ответ: $1.6\cdot 10^{10}$ Дж; $-3.2\cdot 10^{10}$ Дж; $1.6\cdot 10^{10}$ Дж.

7. Карандаш длиной 15 см, поставленный вертикально, падает на стол без проскальзывания. Какую линейную скорость будет иметь верхний конец карандаша в конце падения?

Ответ: 2.1 м/с.

Занятие 4. **КОЛЕБАНИЯ**

4.1. Подготовительные задания

1. Объясните понятия и термины: гармонические колебания, амплитуда X_0, фаза α, циклическая частота ω, частота ν, начальная фаза α_0 , период T гармонических колебаний, осциллятор, фазовое пространство, фазовая траектория, пружинный и математический маятники, физический маятник, добротность Q, коэффициент затухания δ, логарифмический декремент затухания Θ, резонанс. Укажите размерности и единицы измерения физических величин. Дайте определения вынужденных и свободных колебаний.

2. Дайте пояснения к следующим формулам:

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \alpha_0), \tag{4.1}$$

$$\alpha = \omega t + \alpha_0, \tag{4.2}$$

$$p = X_0 \omega m \sin(\omega t + \alpha), \tag{4.3}$$

$$F = -kx = ma, \tag{4.4}$$

$$\omega = \sqrt{k/m}, \tag{4.5}$$

$$F = mg \sin \alpha = ma, \tag{4.6}$$

$$\omega_0 = \sqrt{g/\ell}, \tag{4.7}$$

$$M = -\gamma\varphi = \varepsilon J, \tag{4.8}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\gamma/J}, \tag{4.9}$$

$$W_{\text{п}} = -\int_0^x F dx = \frac{kx^2}{2}, \tag{4.10}$$

$$W_{п} + W_{к} = \frac{m{x_0}^2\omega^2}{2}, \qquad (4.11)$$

$$\operatorname{tg}\alpha_{0\Sigma} = \frac{X_{01}\sin\alpha_{01} + X_{02}\sin\alpha_{02}}{X_{01}\cos\alpha_{01} + X_{02}\cos\alpha_{02}}, \qquad (4.12)$$

$$X_{0\Sigma} = \sqrt{X_{01}^2 + X_{02}^2 + 2X_{01}X_{02}\cos(\alpha_{02} - \alpha_{01})}, \qquad (4.13)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -r\frac{dx}{dt} - kx, \qquad (4.14)$$

$$x(t) = X_0\exp(-t/\tau)\cos\omega t, \qquad (4.15)$$

$$\tau = 2m/r, \qquad (4.16)$$

$$\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}, \qquad (4.17)$$

$$\delta = 1/\tau, \qquad (4.18)$$

$$\delta_{кр} = 1/\tau_{кр} = \omega_0, \qquad (4.19)$$

$$\theta = \ln\frac{X_0(t)}{X_0(t+T)} = \frac{T}{\tau}, \qquad (4.20)$$

$$Q = \frac{\pi\tau}{T} = \frac{\pi}{\theta}. \qquad (4.21)$$

4.2. Теоретические задания

1. Для каких аргументов α справедливы следующие приближения:

$$\cos\alpha \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \ \sin\alpha \simeq \alpha.$$

2. Докажите, что если колебание тела происходит без трения, сумма его потенциальной и кинетической энергий есть величина постоянная [см. (4.11)].

3. Докажите, что полная энергия осциллятора равна произведению частоты ν на площадь S, ограниченную его фазовой траекторией.

4. Выведите формулы для расчета циклической частоты колебаний пружинного (4.5), математического (4.7), физического (4.9) на основании уравнений их движений (4.4), (4.6), (4.8).

5. Докажите, что если точка одновременно участвует в двух параллельных колебательных движениях с одной и той же частотой, то результирующее движение также является гармоническим колебанием, причем начальная фаза $\alpha_{0\Sigma}$ и амплитуда $X_{0\Sigma}$ определяются формулами (4.12), (4.13), где α_{01} и α_{02}, X_{01} и X_{02} – начальные фазы и амплитуды составляющих колебаний соответственно.

6. Подстановкой докажите, что уравнение колебаний осциллятора с затуханием (4.14) имеет решение (4.15), причем время релаксации и частота определяются уравнениями (4.16) и (4.17) соответственно.

4.3. Индивидуальные задания

1. Пусть ось z, вокруг которой может вращаться изображенное на рис. 2.1 тело, расположена горизонтально. Тело отклонили на угол $\varphi_0 = \pi/(6N)$ и отпустили, в результате чего оно стало совершать колебательное движение. Трение отсутствует. Определите частоту колебаний, считая что $\varphi_0 \ll 1$.

2. Напишите уравнения $\varphi(t)$, $L(t)$, $W_{ï}(t)$, $W_{ê}(t)$ и уравнение фазовой траектории в координатах (φ, L) для колебаний тела в условиях предыдущей задачи.

3. Используя полученные в предыдущем задании аналитические зависимости, постройте графики $\varphi(t)$, $L(t)$, $W_{ï}(t)$, $W_{ê}(t)$ и фазовую траекторию в координатах φ, L. Как изменятся эти графики при наличии трения?

4. Покажите, что в условиях задачи 1 данного задания полная энергия колеблющегося тела остается величиной постоянной, и вычислите ее. Постройте потенциальную кривую $W_{ï}(\varphi)$.

5. В условиях задачи 1 данного задания определите период колебаний и время релаксации физического маятника при наличии трения, если коэффициент трения r, $\text{êã} \cdot \text{ì}^2/\text{ñ}$, определяется выражением: $r = \left(\sin\left(\sqrt{\varphi_0}\right)\right)^2$.

4.4. Контрольные задания

1. Определите период собственных колебаний:

– цилиндра высотой 10 см, плавающего в вертикальном положении в жидкости, если плотность материала цилиндра составляет 90 % плотности жидкости;

– однородного стержня длиной 0.3 м, подвешенного за один из его концов;

– столба ртути в сообщающихся трубках манометра, если его высота равна 0.5 м.

2. Разложите гармоническое колебание, совершающееся по закону $x = 10\cos(6t + 0.2\pi)$, на два гармонических колебания той же частоты и того же направления так, чтобы начальные фазы колебаний были равны $\alpha_{01} = 0.1\pi$ и $\alpha_{02} = 0.5\pi$ соответственно.

Ответ: $x = 8\cos(6t + 0.1\pi)$; $x = 4\cos(6t + 0.5\pi)$.

3. Математический маятник длиной $l = 0.5$ м, выведенный из положения равновесия, отклонился при первом колебании на $x_1 = 5$ см, а при втором (в ту же сторону) – на $x_2 = 4$ ñì. Найдите логарифмический декремент затухания и время релаксации для этих двух колебаний.

Ответ: 0.223 с; 6.3 с.

Список рекомендуемой литературы

Савельев И. В. Курс общей физики: В 3 т. М.: Наука, 1989. Т. 1.

Трофимова Т. И. Курс физики: Учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2000.

Сивухин Д. М. Общий курс физики. Механика. М.: Наука, 1989.

Содержание

Редактор И. Г. Скачек

Подписано в печать: Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 1,5.
Тираж 1500 экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5