Б.М. КОЛОМЫЦЕВ , Н.Б. СТРАХОВ

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

ПО МЕХАНИКЕ, МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ И ТЕРМОДИНАМИКЕ

Санкт-ПЕТЕРБУРГ 2013 г.

Данный задачник представляет сборник индивидуализированных тематических задач с параметрическими начальными данными N и k, которые имеют ограничения: $N \leq 30,\ k = (1 \div 9)$. Использование таких данных позволяет получить в каждой задаче число от-ветов, а иногда и решений равное числу сочетаний C_k^N.

Многие задачи являются комплексными, повышенной трудности, требуют углубленного изучения теоретического материала.

В задачнике 5 тем: Поступательное движение; Вращательное движение; Колебания; Молекулярная физика; Термодинамика. В каждой теме 25 задач.

В начале каждой темы помещен краткий перечень понятий, законов, формул, касающихся данной темы.

Все задачи решаются в системе СИ. Однако, в условиях задач используются и внесистемные единицы измерения.

Формализация входных данных в задачах дает возможность использовать специаль-ные компьютерные программы для формирования заданий, контроля, проверки и оценки этих задач, что, в основном, и послужило целью разработки задачника.

Предлагаемый сборник задач предназначен для преподавателей и студентов технических вузов при организации и проведении контрольных и самостоятельных работ, а также индивидуальных домашних заданий.

1.1 Поступательное движение

Основные формулы:

Основной закон динамики (второй закон Ньютона):

$\vec{F} = \frac{d(\overrightarrow{m\vartheta})}{dt}$, если $m = const$, то $\vec{F} = m\frac{d\vec{\vec{\vartheta}}}{dt} = m\vec{a}$

Кинетическая энергия поступательного движения тела:

$$W_k = \frac{m\vartheta^2}{2}$$

Потенциальная энергия тела у поверхности Земли на высоте h:

$$W_п = mgh$$

В общем случае потенциальная энергия тела и сила, действующая на тело в данной точке поля, связаны соотношением:

$$\overrightarrow{F} = -grad\, W, \quad \vec{F} = -(\frac{\partial W}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial W}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial W}{\partial z}\vec{k})$$

Работа, совершаемая постоянной силой при перемещении на $\Delta\vec{r}$:

$$\Delta A = \left(\vec{F}\,\Delta\vec{r}\right) = F\,\Delta r\,\cos\alpha = F_r\,\Delta r,$$

где α – угол между векторами силы и перемещения.

В случае переменной силы:

$$A = \int F_r\,dr$$

Мощность:

$$P = \frac{dA}{dt} = \left(\vec{F}\,\vec{\vartheta}\right) = F\vartheta\,\cos\alpha.$$

1.1.1. Тело брошено со скоростью $\vartheta = N$ м/с под углом к горизонту $\varphi_1 = 30^0$ (при нечетном N) и $\varphi_2 = 45^0$ (при четном N). Найти максималь ную высоту полета, время полета, расстояние до точки приземления тела.

1.1.2. На рельсах неподвижная платформа с орудием массой $M = 100N$ кг. Из орудия произведен выстрел снарядом $m = N$ кг и скоростью $\vartheta = 100N$ м/с. Определить расстояние, на которое откатилась платформа, и ее время движения после выстрела при коэффициенте трения между колеса- ми и рельсами $\mu = 0{,}02$.

1.1.3. Тело массой $m = N$ кг свободно падает с высоты $H = 10N$ м. С вы соты $h = \frac{H}{2}$ на тело действует постоянная по величине сила $F = 5N$ Н, совпадающая по направлению с силой тяжести. Найти: а) уравнение движения тела, б) время и максимальную скорость падения тела, в) построить график дви жения тела (изменение координаты от времени), г) на сколько градусов изме нится температура воды в объеме $V = N$ л, при падении тела в этот объем?

1.1.4. Решить задачу 1.1.3. для случая, когда сила F противоположна по направлению силе тяжести.

1.1.5. Для определения скорости частицы используют 2 диска на одной оси, вращающихся с одинаковой скоростью. Какова скорость частицы, если она, пролетая через отверстие в первом диске, оставляет след на втором ди ске, смещенный относительно отверстия на первом диске на угол $\varphi = N^o$. Расстояние между дисками $L = N$ см, частота их вращения $n = 100N$ об/мин

1.1.6. Два тела с массами $m_1 = 2N$кг и $m_2 = N$кг движутся навстречу друг другу (для четных N) и друг за другом (для нечетных N) со скоростями $\vartheta_1 = 2N$ м/с и $\vartheta_2 = N$ м/с. Определить количество тепла, выделившееся при неупругом ударе.

1.1.7. С высоты $H = N$ м по наклонной плоскости без трения скатывается платформа с пушкой массой $M = 100N$ кг. В середине пути из пушки произведен выстрел снарядом массой $m = 2N$ кг, вылетевшим со скоростью $\vartheta = 100N$ м/с . Какова скорость платформы в конце наклонного пути? Какое количество тепла выделится при ее неупругом столкновении с аналогичной неподвижной платформой, находящейся у основания наклонной плоскости? Угол наклона плоскости к горизонту $\varphi = 5(k + 1)^o$.

1.1.8. С высоты Н = N м скользит тело по наклонному желобу, переходящему в окружность (рис. 1.1.). Определить скорость тела в момент отрыва от желоба, максимальую высоту подъема и кинетическую энергию тела в наивысшей точке траектории движения. Трением пренебречь. Масса тела $m = (k+1)$ кг.

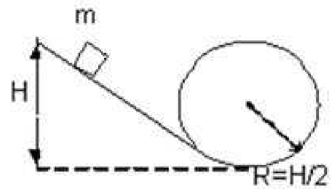

Рис. 1.1.

1.1.9. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на очень легком стержне, и застревает в нем. Масса пули в $10N$ раз меньше массы шара. Длина стержня $L = N$ м. Определить скорость пули, если стержень отклонился на угол $\varphi = 10(k+1)^0$.

1.1.10. На горизонтальном столе лежит тело массой $m_1 = (k+1)$ г (рис. 1.2.), связанное нитью, переброшенной через блок, с грузом $m_2 = 2\sqrt{N}$ г . Считая, что в системе отсутствуют силы трения, определить ускорение тел и натяжение нити. Блок неподвижен.

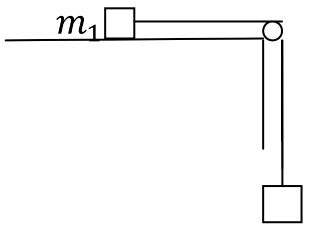

Рис. 1.2.

1.1.11. Ветер со скоростью $v_0 = (10+k)\frac{\text{м}}{\text{с}}$ действует на парус площадью $F = \frac{S\rho(v_0-v)^2}{2}$, где $\rho = 1{,}2\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ - плотность воздуха, $v -$ скорость судна. Определить: скорость судна, при которой мощность ветра максималь-на, эту мощность, а также работу силы ветра за время $\Delta t = 10N$ с.

1.1.12. Деревянный шар массой $m_1 = (k+1)$ кг лежит на штативе, верхняя часть которого выполнена в виде кольца. Снизу в шар попадает пу-ля, летящая вертикально, и пробивает его. При этом шар поднимается на высоту $H = 1$ м. На какую высоту H_1 поднимется пуля над штативом, если ее скорость перед ударом о шар была $\vartheta = 100N$ м/с. Масса пули $m_2 = 10$ г. Изменением массы шара пренебречь.

1.1.13. Горизонтально летящая пуля массой $m = 10$ г попадает в деревянный куб, лежащий на полу, и пробивает его. Определить, какая часть энергии пули перешла в тепло и величину этой тепловой энергии? Начальная скорость пули $\vartheta_0 = 100N$ м/с, скорость после вылета из куба $\vartheta_1 = 0{,}5\vartheta_0$, масса куба $M = (k + 1)$ кг. Траектория пули проходит через центр куба, трение между кубом и полом отсутствует. Изменением массы куба пренебречь.

1.1.14. Теннисный мяч, падая с высоты $h_0 = (k + 1)$ м, после каждого отскока от пола поднимается на высоту $h_n = 0{,}8h_{n-1}$. На какую высоту он поднимется после $n = (N + 1)$ отскока?

1.1.15. Санки, движущиеся по льду со скоростью $\vartheta = N$ м/с, вылетают на асфальт. Длина полозьев санок $(0{,}9 + 0{,}01k)$ м, коэффициент трения об асфальт $\mu = 0{,}8$. Какой путь пройдет передний конец полозьев санок по асфальту до полной остановки? Принять, что масса санок распределена по длине санок равномерно.

1.1.16. С наклонной плоскости высотой H=N м соскальзывает шайба и в конце спуска ударяется о стенку (рис. 1. 3.). Считая удар абсолютно упругим, определить , на какую высоту поднимется шайба. Угол наклона плоскости $\varphi = (21 + k)^0$. Коэффициент трения о плоскость равен $\mu = 0{,}05$.

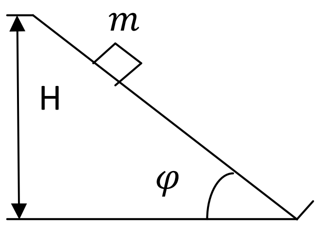

Рис. 1. 3.

1.1.17. Для определения коэффициента трения можно воспользоваться установкой, представляющей собой горизонтальную вогнутую сферическую поверхность с нанесенными градусными метками. Тело устанавливают на поверхности так, чтобы радиус, проведенный в его центр масс из центра сферической поверхности, составлял с вертикалью угол $\varphi = (30 + N)^0$, после чего тело начинает скользить под действием собственного веса по сферической поверхности, поднимаясь на угол $\beta = (20 + k)^0$. Найти коэффициент трения μ.

1.1.18. Брусок массой $m = 2(k + 1)$ кг тянут по горизонтальной поверхности, прикладывая силу $F = N$ Н под углом $\varphi = 30^0$ к горизонту. При этом брусок за время $\Delta t = 30$ с изменил свою скорость от $\vartheta_1 = 2$ м/с до $\vartheta_2 = 4$ м/с, двигаясь ускоренно в одну сторону. Найти коэффициент трения бруска о поверхность.

1.1.19. Ледяная гора составляет с горизонтом угол $\varphi = 30^0$. По ней пускают снизу вверх камень, который в течение времени $t_1 = (2 + 0{,}01k)$ с проходит расстояние $L = (15 + 0{,}1N)$ м, после чего соскальзывает вниз. Какой промежуток времени Δt длится соскальзывание камня вниз? Какой коэффициент трения между горой и камнем?

1.1.20. Для забивки сваи массой $m_1 = 100$ кг используется копер, подъемная часть которого массой $m_2 = 400$ кг падает с высоты $h = (125 + N)$ см . Найти среднюю силу сопротивления грунта, если в результате одного удара свая уходит в землю на глубину $l = (k + 1)$ см. Считать удар между сваей и падающим грузом абсолютно неупругим.

1.1.21. Человек массой $m_1 = (60 + N)$ кг прыгает с неподвижной тележки, стоящей на рельсах, вдоль рельс. При этом тележка, масса которой $m_2 = (20 + k)$ кг, откатывается в противоположном направлении на расстояние $L = 2$ м. Коэффициент трения колес тележки о рельсы $\mu = 0{,}1$. Найти энергию, затраченную человеком при прыжке.

1.1.22. При падении тела массой $m = (k + 1)$ кг с большой высоты его скорость при установившемся движении равна $\vartheta_1 = (100 + N)$ м/с. Определить время Δt, за которое, начиная от момента падения, скорость тела становится $\vartheta_2 = 0{,}5\, \vartheta_1$. Силу сопротивления воздуха принять пропорциональной скорости тела. Определить коэффициент сопротивления μ.

1.1.23. Груз массой $m = (k + 1)$ кг, висящий на нити, отклоняется на угол $\varphi = (30 + N)^0$. Найти натяжение нити в момент прохождения грузом положения равновесия.

1.1.24. Вода течет по горизонтальной трубе с закруглением радиусом $R = (10 + k)$ м на конце трубы таким, что конец трубы направлен вниз. Найти боковое давление воды на стенку в закруглении, вызванное центробеж-ной силой. Диаметр трубы $d = (10 + N)$ см. Через поперечное сечение тру- бы за 1 час протекает $m = 300$ т воды. Плотность воды $\rho = 10^3\, \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

1.1.25. Гирька массой $m = (k+1)10^2$ г, привязанная к резиновому шнуру длиной l_0, описывает в горизонтальной плоскости окружность (рис. 1.4.). Частота вращения гирьки $\nu = 2\,\frac{\text{об}}{\text{с}}$. Угол отклонения резинового шнура от вертикали $\varphi = (20+N).^0$ Найти длину l_0 нерастянутого шнура. Для растяжения шнура на 1 см требуется сила 6 Н.

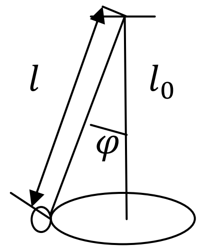

Рис. 1.4.

1.2. Вращательное движение

Основное уравнение динамики вращательного движения:

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

где $\vec{M} = [\vec{R}\vec{F}]$ – момент внешних сил, действующих на вращающееся тело; I - момент инерции тела; $\vec{\omega}$ - угловая скорость; $\vec{L} = I\vec{\omega}$ - момент импульса.

В случае постоянного во времени момента инерции имеем:

$$\vec{M} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\varepsilon},$$

где $\vec{\varepsilon}$ - угловое ускорение.

Закон сохранения момента импульса для замкнутой системы тел:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i\vec{\omega}_i = const,$$

Здесь I_i , $\vec{\omega}_i$ – момент инерции и угловая скорость i - го тела, входящего в рассматриваемую систему тел; n – количество, входящих в систему тел.

Работа момента сил $\vec{M}$, действующего на вращающееся тело:

$$\Delta A = (\vec{M}\Delta\vec{\varphi}),$$

где $\Delta\vec{\varphi}$ - вектор углового перемещения тела.

Кинетическая энергия вращающегося тела:

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2}.$$

В случае, если тело совершает одновременно поступательное и вращательное движение, полная кинетическая энергия тела:

$$W_k = \frac{m\vartheta^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

Работа при вращении тела:

$$\Delta A = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}.$$

Мощность, развиваемая при вращении тела:

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\overrightarrow{(\vec{M}d\vec{\varphi})}}{dt} = (\vec{M}\vec{\omega}).$$

1.2.1. Рамка может вращаться вокруг проходящей через ее центр инерции вертикальной оси OZ. В рамке симметрично относительно оси OZ на расстояниях $L = 0{,}2N$м от оси укреплены вертикальные оси двух одинаковых дисков массами $m = \frac{(k+1)}{N}$ кг каждый (рис. 1.5.). Момент инерции рамки относительно оси OZ $I_1 = 0{,}02N$ кг м^2, момент инерции каждого диска относительно собственной оси $I_2 = 0{,}01N$ кг м^2. Вначале система находится в покое, затем диски начинают вращаться в одну сторону с одинаковыми угловыми скоростями, делая $n_2 = \sqrt{N}\ \frac{\text{об}}{\text{с}}$ относительно рамки . Определить угловую скорость рамки.

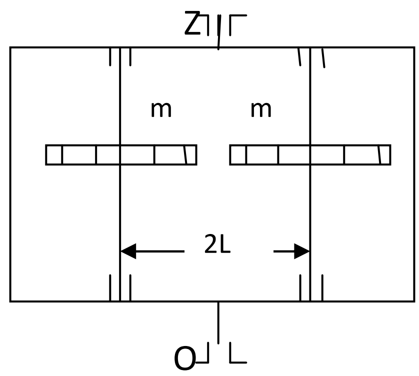

Рис. 1.5.

1.2.2. Колесо диаметром $D = 0{,}1\sqrt{N}$ м, насаженное на горизонтальную ось, катится по горизонтальной плоскости без скольжения вокруг вертикальной оси (рис. 1.6.), описывая окружность радиусом $R = 0{,}1\sqrt{2N}$ м. Центр колеса движется со скорость $v = 0{,}1(k + 1)$ м/с. Найти значе- ние результирующей угловой скорости колеса и угол ее наклона к вертикали.

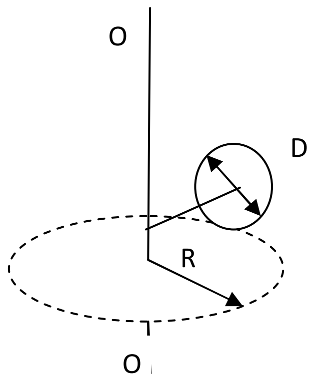

Рис.1.6.

1.2.3. На горизонтальном столе лежит тело массой $m_1 = (k + 1)$ г , связанное нитью, переброшенной через блок массой $m_2 = \sqrt{N}$ г, с грузом массой $m_3 = 2\sqrt{N}$ г. Блок представляет собой однородный сплошной диск радиусом $R = N$ см (рис.1.7.). Считая , что в системе отсутствуют силы трения, найти ускорение тел и натяжения нити.

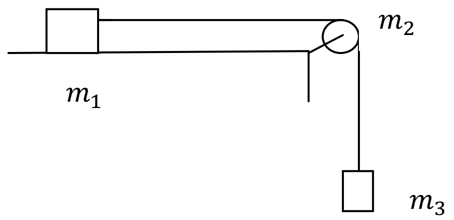

Рис.1.7.

1.2.4. Для машины Атвуда (рис.1.8.) ускорение движения грузов определяется выражением $a = \frac{(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)} g$, но без учета вращения блока.Как изменится его значение, если учесть вращение блока, считая его сплошным диском? Рассчитать ускорение тел и натяжения нитей для масс $m_1 = 2N$ кг, $m_2 = N$ кг, $m_{бл} = (k + 1)$ кг. Радиус блока $R = N$ см.

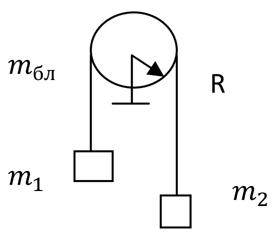

Рис.1.8.

1.2.5. Человек массой $m_1 = 10(k + 4)$ кг стоит на неподвижной круглой платформе на расстоянии $L = 0{,}1N$ м от оси платформы. Найти, с какой линейной скоростью должен двигаться человек по окружности, чтобы платформа начала вращаться, делая $n = (k + 4)\,\frac{\text{об}}{\text{мин}}$. Масса платформы $m_2 = 10N$ кг, диаметр $D = N$ м.

1.2.6. Найти кинетическую энергию велосипедиста, едущего со скоростью $\vartheta = N$ км/ч. Масса велосипедиста с велосипедом $m_1 = 20(k+1)$ кг, причем масса колес $m_{2=}\sqrt{N}$ кг. Колеса велосипеда считать обручами диаметром $D = 0{,}1N$ м. Какой путь проедет велосипедист, не вращая педалями, при коэффициенте трения колес о дорогу $\mu = 0{,}1$?

1.2.7. Велосипедист массой $m_1 = 80$ кг (с велосипедом) движется со ско ростью $\vartheta = N$ км/ч. Определить, какую энергию он тратит, если потери ее на трение составляют $(k+1)\%$. Колеса считать обручами массой $m_2 = 3$ кг.

1.2.8. Вытащенное из колодца ведро с водой уронили, и оно стало опускаться вниз, раскручивая ворот. Трение в подшипниках ворота создает постоянный тормозящий момент $M = 0{,}1N$ Нм. Масса ведра с водой $m_1 = \sqrt{N}$ кг, масса ворота $m_2 = 2\sqrt{N}$ кг, радиус ворота $R = 10(k+1)$ см. Расстояние от края сруба до поверхности воды в колодце $h = N$ м. Определить: а) через какое время Δt ведро коснется воды в колодце; б) какую скорость ϑ_{max} будет иметь ведро в конце падения; в)какую работу A совершают силы трения за время падания ведра. Ворот считать однородным цилиндром.

1.2.9. На какую высоту поднимутся шары центробежного регулятора , (рис.1.9.), если он делает $n = (75+N)$ об/мин Длина подвеса $l = (0{,}4 + 0{,}1k)$ м.

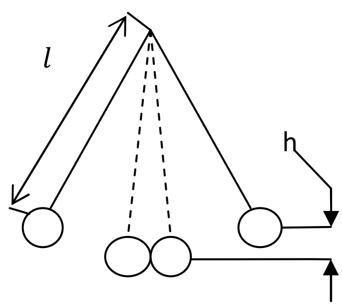

Рис.1.9.

1.2.10. В тонком диске вырезано симметрично 4 круглых отверстия радиусами $r = N$ см на равных расстояниях $a = 4$ м от центра диска. Определить момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр тяжести. Масса диска m=(k+1) кг, радиус R=10 м.

1.2.11. Радиус вала махового колеса $R = (k+1)10^{-2}$м. На вал намотан шнур, к концу которого привязан груз $m = 0{,}1N$ кг. Под действием силы тяжести груз опускается за $\Delta t = 5$ с с высоты $h_1 = 1{,}2$ м, а затем вследствие вращения колеса по инерции поднимается на высоту $h_2 = 0{,}8$ м. Определить момент инерции вала колеса.

1.2.12. Определить момент инерции цилиндрической муфты относительно оси, совпадающей с ее осью симметрии. Масса муфты $m = (k+1)\text{кг}$ внутренний радиус $r = (3 + 0{,}1N)$ см, внешний $R = 0{,}06$ м. Выражение для момента инерции вывести.

1.2.13. Определить момент инерции полого шара массой $m = (k+1)$ кг относительно касательной. Внутренний радиус шара $r = (3 + 0{,}1N)10^{-2}$ м, внешний $R = 8$ см.

1.2.14. Два резиновых диска с шероховатой поверхностью вращаются вокруг одной и той же оси, совпадающей с их осями симметрии. Плоскости дисков параллельны. У одного диска момент инерции $I_1 = 0{,}1N$ кг/м^2 и угловая скорость $\omega_1 = 10(k+1)\ \text{рад}/c$, а у другого $I_2 = 2I_1$ и $\omega_2 = 0{,}5\omega_1$. Определить угловую скорость и изменение кинетической энергии двух дисков при падении верхнего диска и соединении его с нижним без проскальзывания.

1.2.15. В ящик с песком массой $m_1 = (k+1)$ кг, подвешенный на нити длиной $l = (2{,}75 + 0{,}01N)$ м, попадает горизонтально летящая пуля массой $m_2 = 10$ г и отклоняет его на угол $\varphi = 10^0$. Определить скорость пули.

1.2.16. Диск катится в течение $\Delta t = (k+1)$ с и останавливается, пройдя расстояние $l = 0{,}5N$ м. Определить коэффициент трения.

1.2.17. Крутильно-баллистический маятник представляет собой систему, состоящую из двух одинаковых грузов, закрепленных посередине стальной проволоки на одинаковых расстояниях $R = 0{,}1(k+1)$ м от нее (рис.1.10). Верхний и нижний концы проволоки жестко закреплены. Длина проволоки $l = 2$ м, диаметр $d = 2$ мм. Пуля массой $m = 10$ г попадает в центр одного из грузов, и маятник, обладающий моментом инерции $I = 1\ \text{кгм}^2$, поворачивается на угол $\varphi = 0{,}1\ N\ \text{рад}$. Определить скорость пули. Крутящий момент проволоки $M = \frac{\pi G d^4 \varphi}{32 l}$, где G – модуль сдвига материала проволоки. Для стали $G = 8 \cdot 10^{10}\ \text{Н}/\text{м}^2$.

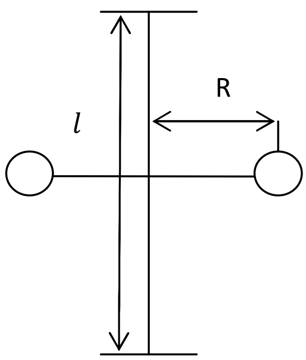

Рис.1.10.

1.2.18. С какой скоростью должен въехать велосипедист в нижнюю точку “мертвой петли” радиуса $R = 4$ м, чтобы не сорваться вниз в верхней точке петли? Масса велосипедиста с велосипедом $m_1 = (80 + k)$ кг, масса обоих колес $m_2 = (5{,}75 + 0{,}01N)$ кг. Трением пренебречь. Колеса считать обручами.

1.2.19. Два маховика, в виде дисков радиусами $r = 0{,}1(k + 1)$ м и массами $m = 10N$ кг каждый, были раскручены до $n = 480\ \text{об/мин}$ и предоставлены самим себе. Под действием трения в подшипниках валов первый маховик остановился через $\Delta t = 80$ с, а второй до полной остановки сделал 240оборотов. Определить моменты сил трения в подшипниках валов.

1.2.20. С наклонной плоскости скатывается без скольжения однородный диск (рис.1.11.). Найти ускорение диска и силу трения, если угол наклона плоскости к горизонту $\varphi = 6\,(k + 1)^0$, а масса диска $m = (475 + N)$ г. При каком условии реализуется такое скатывание, т.е. отсутствие скольжения?

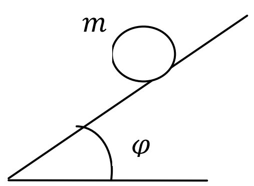

Рис. 1.11.

1.2.21. Столб высотой $h = (k + 1)$ м и массой $m = (25 + N)$ кг подпиливают у основания. Считая столб тонким и однородным, определить изменение кинетической и потенциальной энергий столба при падении на землю, а также скорость падения его верхнего конца.

1.2.22. Платформа в виде диска массой $m_1 = 10(k + 1)$ кг и радиусом $R = 2$ м вращается, делая $n_1 = N\ \text{об/с}$. В центре платформы стоит человек массой $m_2 = 60$ кг. Какую линейную скорость относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

1.2.23. Металлическая цепочка длиной $l = (60 + k)$ см, концы которой соединены, висит на диске. Диск вращается, делая $n = 60\ \text{об/с}$. Определить натяжение цепочки, если ее масса $m = (30 + N)$ г.

1.2.24. Система, состоящая из двух взаимно-перпендикулярных стерж-

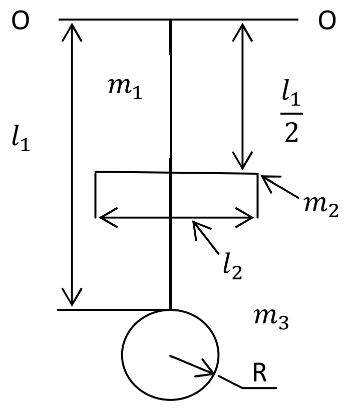

Рис. 1.12.

ней и шара (рис.1.12.), вращается вокруг оси О-О. Определить момент инерции системы относительно этой оси, если масса большого стержня m_1=(k+1) кг, длина l_1=(1,75+0,01N) м. Масса малого стержня $m_2 = m_1/2$, его длина $l_2 = l_1/2$. Масса шара $m_3 = 2m_1$. Радиус шара $R = l_1/4$.

1.2.25. Однородный шар радиусом $R = (k + 1)$ см скатывается без скольжения с наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30^0. Угловая скорость вращения шара $\omega = 10N$ рад/с. Найти время Δt за которое угловая скорость шара возрастет в 2 раза.

1.3. Колебательное движение

Уравнение гармонических колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

где ω - циклическая частота.

Его решение – закон гармонических колебаний:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_1) \text{ или } x = A\cos(\omega t + \varphi_2),$$

здесь A - амплитуда колебаний, φ_1, φ_2 - начальные фазы, $(\omega t + \varphi)$ - фаза колебаний ($\omega = 2\pi$v=$\frac{2\pi}{T}$, где v – частота, Т – период колебаний).

Скорость точки, совершающей гармонические колебания:

$$\vartheta = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_1) \text{ или } = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_2).$$

Ее ускорение:

$$a = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_1) \text{ или } = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_2),$$

откуда:

$$a = -\omega^2 x\ .$$

Сила (упругая сила), под действием которой материальная точка массой m совершает гармонические колебания:

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2 x = -kx,$$

где $k = m\omega^2$ - коэффициент упругости.

Кинетическая энергия гармонических колебаний:

$$W_k = \frac{m\vartheta^2}{2}.$$

Потенциальная энергия гармонических колебаний:

$$W_\text{п} = \frac{kx^2}{2}.$$

Полная энергия:

$$W\ = W_k + W_\text{п} = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{m2\pi^2A^2}{T^2} = \frac{kA^2}{2}.$$

Период колебаний математического маятника:

$$T\ = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,,$$

где l - длина нити, g - ускорение силы тяжести.

Период колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}},$$

Здесь I - момент инерции колеблющегося тела относительно оси не проходящей через его центр масс; a – расстояние между центром масс маятника и осью колебаний; $l_{\text{пр}}$ - приведенная длина физического маятника.

В случае крутильных колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}},$$

где I - момент инерции тела относительно оси, совпадающей с нитью; k – жесткость этой нити, которая определяется отношением упругого момента, возникающего при закручивании нити, к углу закручивания нити.

Сложение колебаний:

а) одинаково направленные колебания, уравнения которых:

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1), \;\; x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2),$$

тогда уравнение результирующего колебания:

$$x = A\cos(\,\omega t + \varphi),$$

где

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\,\varphi_2 - \varphi_1)}\;,$$

$$\varphi = arctg\,\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2},$$

б) взаимно перпендикулярные колебания, уравнения которых:

$$x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1), \;\; y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)\,,$$

при сложении дают уравнение результирующего колебания:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

В зависимости от соотношений между A_1 и A_2, φ_1 и φ_2 траектория может представлять собой прямую линию, окружность или эллипс.

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

Его решение:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Здесь $A_0 e^{-\beta t} = A$ - убывающая во времени амплитуда колебаний; β - коэффициент затухания ($\beta = \frac{r}{2m}$, r - коэффициент сопротивления, m - масса колеблющегося тела); $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ -циклическая частота затухающих колебаний; ω_0 - циклическая частота собственных колебаний тела ($\omega_0^2 = \frac{k}{m}$); k – коэффициент упругости; φ_0 - начальная фаза колебаний.

Логарифмический декремент затухания:

$$\delta = \ln\frac{A_1}{A_2} = \beta T,$$

где A_1, A_2 – амплитуды двух последовательных колебаний, отличающихся по времени на период T.

1.3.1. Точка массой $m = N$ г одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = N\sin(\sqrt{N}t)$ см и $y = 2N\cos(\sqrt{N}t)$ см. Найти уравнение движения точки и построить траекторию ее движения. Определить скорость, ускорение и кинетическую энергию точки в момент времени $t = (k+1)$ с.

1.3.2. Гиря массой $m = 100N$ г подвешена на пружине, коэффициент упругости которой $k = (k+1)$ Н/м. Гиря отпущена и совершает затухающие колебания. Определить период колебаний и оставшуюся запасенную энергию в пружине, если за время, в течение которого произошло $n = 5N$ колебаний, амплитуда уменьшилась в 20 раз.

1.3.3. Тело массой $m = N$ кг падает с высоты Н на чашку пружинных весов и начинает колебаться вместе с чашкой по закону $x = 10\sqrt{N}\sin(10\sqrt{N}\,t)$ см. Определить высоту Н, кинетическую и потенциальную энергии пружины в момент времени $t = (k+1)$ с. Массой чашки пренебречь.

1.3.4. Тело массой $m_1 = 0{,}1(k+1)$ кг падает с высоты Н на чашку пружинных весов, совершая затем с чашкой вертикальные колебания по закону $x = 6\sqrt{N}\sin(\frac{10t}{\sqrt{N}})$ см. Определить высоту падения тела; количество тепла, выделившееся при ударе. Масса чашки $m_2 = (k+1)$ кг. Взаимодействие тела с чашкой считать абсолютно неупругим.

1.3.5. Если бы можно сделать отверстие в Земле вдоль ее диаметра, то тело, упавшее в отверстие, совершало бы колебания около центра Земли. Определить период таких колебаний, а также максимальный импульс тела при его падении с расстояния $l = \frac{R_з}{N}$ км от центра Земли. Трением пренебречь. Масса тела $m = (k+1)$ кг.

1.3.6. Балансир в часах представляет собой тонкое кольцо радиусом $R = N$ см, которое колеблется с частотой ν = 2,5 Гц. Чему равна масса балансира, если для закручивания его на угол $\alpha = 10(k+1)^0$ требуется момент $M = N10^{-5}$ Нм.

1.3.7. К пружине подвешена чашка весов с гирями. При этом период колебаний равен $T_1 = 0{,}1(k+1)$ с. После того, как на чашку весов положили еще добавочные гири, период вертикальных колебаний увеличился на $\Delta T = 0{,}01N$ с. На сколько удлинилась пружина от добавления груза?

1.3.8. Ареометр массой $m = 0{,}1 + 0{,}01(k+1)$ кг плавает в жидкости. Если погрузить его немного в жидкость и отпустить, то он начинает совершать колебания с периодом $T = (3 + 0{,}1N)$ с. Считая колебания незатухающими, найти плотность жидкости ρ, в которой плавает ареометр. Диаметр вертикальной трубки ареометра $d = 1$ см.

1.3.9. В точку А крутильно-баллистического маятника (рис. 1.13.) с моментом инерции $I = 0{,}1N$ кг м^2 попадает пуля массой $m_п = 5$ г. Скорость пули v=10 (79+k) м/с. Найти период и полную энергию колебаний маятника. $R = 0{,}5$ м. Трением пренебречь.

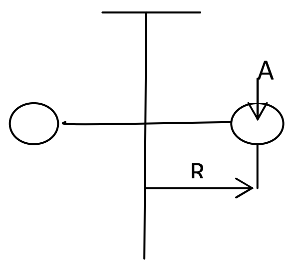

Рис. 1.13.

1.3.10. Материальная точка массой $m = (k+1)$ г совершает гармонические колебания с частотой $\boldsymbol{\nu} = (0{,}25 + 0{,}01\mathrm{N})$ Гц. Амплитуда колебаний $A = 5$ см. Определить: а) скорость точки в момент времени, когда ее смещение x=2 см; б) максимальную силу, действующую на точку; в) полную энергию колеблющейся точки.

1.3.11. Физический маятник представляет собой систему (рис.1.14) , состоящую из тонкого стержня массой m_0=10(25+N) г и длиной $l = 0{,}1\big(9 + 0{,}1(k+1)\big)$ м, на концах которого находятся шарики малых размеров массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г. Стержень совершает колебания относительно горизонтальной оси О , перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Определить период колебаний стержня и максимальную энергию колебаний (до вращения).

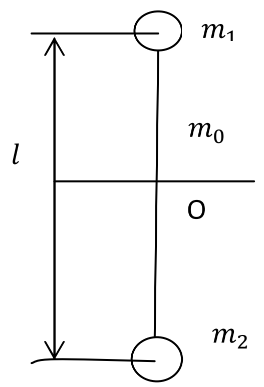

Рис. 1.14.

1.3.12. Определить период колебаний столбика ртути в U-образной трубке при выведении ее из положения равновесия. Площадь сечения трубки $S = \big(0{,}2 + 0{,}01(k+1)\big)$ см^2, масса ртути $m = (100 + N)$ г.

1.3.13. Акробат прыгает на упругую сетку с высоты $h = (9 + 0{,}1(k+1))$м Во сколько раз наибольшая сила давления акробата на сетку больше силы тяжести, если статический прогиб сетки $x = (17{,}5 + 0{,}1N)$ см? Массой сетки пренебречь.

1.3.14. С какой частотой будет колебаться палка массой $m = (1{,}5 + 0{,}1k)$ кг и площадью поперечного сечения $S = (4{,}75 + 0{,}01N)$ см^2, плавающая на поверхности воды в вертикальном положении?

1.3.15. Тело массой $m = N$ г участвует в двух колебаниях одного направления, выражаемых уравнениями $x_1 = N\cos\omega(t+\tau_1)$ см, здесь $\tau_1 = \frac{1}{6}$ с, $x_2 = 2N\cos\omega(t+\tau_2)$ см, здесь $\tau_2 = 0{,}5$ с, $\omega = \pi(k+1)$ рад/с. Определить: а) начальную фазу φ результирующего колебания; б) полную энергию колеблющегося тела; в) написать уравнение результирующего колебания.

1.3.16. Движение точки задано уравнениями $x = 2N\ \sin\omega t$ см и $y = N\sin\omega(t+\tau)$ см, где $\omega = 2\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $\tau = \frac{\pi}{4}$ с . Найти уравнение траектории и скорость точки в момент времени $t = (k+1)$ с.

1.3.17. Под действием силы $F = \sqrt{N}\cos 2t$ Н (при t=0 ϑ_0=0) движется тело массой $m = (k+1)$ кг. Найти выражение для кинетической энергии и определить ее максимальное значение.

1.3.18. Математический маятник массой $m = (75+N)$ г и длиной $l = 0{,}1(10+k)$ м совершает колебания по закону $\varphi = 0{,}25\sin(\frac{2\pi t}{T})$. Определить натяжение нити в момент времени $t = T/2$.

1.3.19. Период колебаний крутильного маятника, состоящего из кольца, соединенного пружиной с осью вращения (рис.1.15), составляет $T = (3 + 0{,}1(k+1))$ с. Определить его момент инерции, если жесткость пружины $\text{к} = 0{,}01\sqrt{N}$ Н/м. Трением пренебречь.

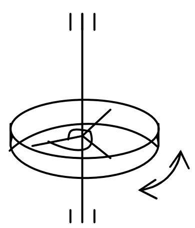

Рис.1.15.

1.3.20. Найти период малых колебаний шара массой $m = (25 + N)$ г,

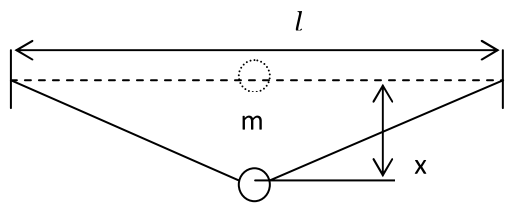

Рис. 1.16.

укрепленного на середине горизонтально натянутой невесомой струны длиной $l = 1$ м (рис.1.16.). Считать натяжение нити в положении равновесия $F = (k + 1)$ Н. Шар колеблется в вертикальной плоскости.

1.3.21. Часто на асфальтовой дороге под влиянием Солнца, нагрузки от проезжающих автомобилей и вязкости асфальта появляются поперечные складки (гладильная доска). При езде по такой “гладильной доске” колеса автомобиля испытывают колебания, близкие к гармоническим. Считая колеса материальными точками, движущимися перпендикулярно складкам, определить: скорость автомобиля, при которой колеса при движении от одного гребня к другому опускаются не более чем на $\Delta x = 0{,}1h$, где $h -$ расстояние от вершины гребня до основания впадины, т.е. равно удвоенной амплитуде колебаний колес при медленном движении. Расстояние между гребнями $\lambda = \sqrt{N}$ м, $h = 5(k + 1)$ см.

1.3.22. Пружина жесткостью $\kappa = (9{,}1 + 0{,}1k)$ кН/м сжата силой $F = (175 + N)$ Н. Определить работу внешней силы, дополнительно сжимающей эту пружину на 1 см.

1.3.23. Деревянное бревно постоянного сечения погрузилось в воду и совершает вертикальные колебания с периодом $T = (4{,}75 + 0{,}01N)$ с. Плотность дерева $\rho = (8 + 0{,}1k)10^2\ \text{кг/м}^3$. Определить длину бревна.

1.3.24. Найти наибольший прогиб рессоры от груза, резко положенного на ее середину $(h = 0)$, если статический прогиб рессоры от того же груза $x_0 = (1{,}75 + 0{,}01N)$ см. Каков будет наибольший начальный прогиб, если на середину той же рессоры падает тот же груз с высоты $h = 0{,}01(90 + k)$ м без начальной скорости?

1.3.25. Какой наименьшей длины l надо взять нить, к которой подвешен однородный шарик диаметром $d = (3{,}75 + 0{,}01N)$ см , чтобы при определении периода малых колебаний шарика рассматривать его как математический маятник? Ошибка в допущении не должна превышать $\Delta = 0{,}1(k + 1)\%$.

1.4. Молекулярная физика

Уравнение состояния идеального газа имеет вид:

$$\frac{pV}{T} = const,$$

Уравнение Менделеева - Клапейрона:

$$pV = \frac{M}{\mu} RT,$$

где p — давление газа; V — объем, занимаемый газом ; M — масса газа; μ — молярная масса; R — универсальная газовая постоянная ($R = 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль К}}$); T — температура газа.

Основное уравнение кинетической теории газа:

$$p = \frac{1}{3} nm\overline{v^2} = \frac{2}{3} n\overline{w_\text{к}} = nkT,$$

где n — число молекул в единице объема; m — масса молекулы; $\sqrt{\overline{v^2}}$ – средняя квадратичная скорость молекулы; $\overline{w_\text{к}} = \frac{3}{2} kT$ — средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы; k — постоянная Больцмана $\left(k = 1{,}38\ 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}\right)$.

Средняя длина свободного пробега молекул газа:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

где d — эффективный диаметр газовой молекулы.

Среднее число соударений, испытываемых молекулой за единицу времени:

$$z = \frac{\bar{v}}{\lambda} = \sqrt{2}\pi d^2 n\bar{v},$$

где $\bar{v}$ — средняя скорость теплового движения молекул.

Скорости газовых молекул:

Средняя скорость теплового движения молекул:

$$\bar{v} = \frac{\sum v_i}{N} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}},$$

где N — общее число молекул.

Средняя квадратичная скорость:

$$\bar{v}_{\text{кв}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Наиболее вероятная скорость:

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}.$$

Распределения молекул по скоростям (распределение Максвелла):

$$dN = N4\pi(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv.$$

Распределение Больцмана:

$$n = n_0 e^{-\frac{w_p}{kT}},$$

здесь w_p — потенциальная энергия молекул; n_0 — концентрация молекул в тех точках поля, где $w_p = 0$.

Барометрическая формула:

$$p = p_0 e^{-\frac{mgh}{kT}},$$

где h —высота над уровнем с потенциальной энергией, равной нулю и давлением p_0.

Коэффициент диффузии:

$$D = \bar{v}\lambda/3.$$

Коэффициент вязкости:

$$\eta = \frac{\lambda \bar{v} \rho}{3} = D\rho.$$

Коэффициент теплопроводности:

$$\kappa = \frac{\rho \bar{v} \lambda c_v}{3} = \rho D c_v = \eta c_v,$$

где ρ — плотность газа; c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Энергия, приходящаяся на одну степень свободы:

$$w = \frac{1}{2} kT.$$

В общем случае градиент какой-то величины A есть вектор равный

$$gradA = \frac{\partial A}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{k},$$

где $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ — единичные вектора (орты) вдоль заданных направлений.

1.4.1. Два диска в воздухе могут вращаться вокруг вертикальной оси,

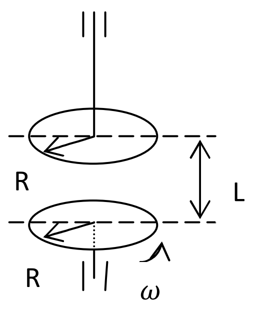

Рис. 1.17.

проходящей через их центры инерции (рис.1.17.). Один из них подвешен над другим , который вращается с угловой скоростью $\omega = N$ рад/с. Определить момент сил трения М, действующий на верхний диск, если радиусы дисков R=0,5(k+1) м одинаковы, расстояние между дисками L=(k+1) см, коэффициент вязкости воздуха $\eta = 1{,}72\ 10^{-5}\ \frac{\text{кг}}{\text{м с}}$.

1.4.2. Найти число столкновений z , которые происходят в течение секунды между всеми молекулами кислорода, находящимися в объеме $V = N\text{мм}^3$. Принять для кислорода эффективный диаметр молекулы $d = (k+1)10^{-10}$ м, $T = 100N$ К, $p = N10^4$ Па. Найти также среднюю скорость теплового движения молекул.

1.4.3. Смесь газов, состоящая из водорода и криптона (Kr) , при давлении $p = N10^5$ Па и температуре $T = 100N$ К имеет плотность $\rho = (k + 1)$ г/л. Сколько молекул водорода содержится в $1\ \text{см}^3$ газовой смеси? Массу атома водорода принять равной $m_H = 1{,}672\ 10^{-24}$ г. $\mu_{Kr} = 83{,}8$ г/моль.

1.4.4. Какое время нужно для откачки камеры объемом $V = 0{,}01N\ \text{м}^3$ от $p_1 = 760\ \text{мм.рт.ст.}$ до $p_2 = 1\ \text{мм.рт.ст.}$ масляным насосом, быстрота действия которого постоянна и равна $q = 1001(k + 1)\ \frac{\text{см}^3}{\text{с}}$. Температуру в камере считать постоянной.

1.4.5. В каждом из двух теплоизолированных баллонов находятся кислород и аргон. Известны число молей газов $\nu_1 = N$ и $\nu_2 = 2N$ в каждом баллоне, их объемы $V_1 = (k + 1)\text{л}$ и $V_2 = (k + 5)\text{л}$ и температуры $T_1 = 100\sqrt{N}$ К и $T_2 = 100\sqrt{2N}$ К. Баллоны соединяют короткой трубкой и газы перемешиваются. Найти температуру и давление смеси газов.

1.4.6. Средняя длина свободного пробега молекул кислорода при температуре $t_1 = 10N$ °С и давлении $p_1 = \sqrt{k + 1}\ 10^5$ Па равна $\lambda_1 = \frac{N}{k+1} 10^{-9}$м Определить среднее число столкновений в секунду при температуре $T_2 = 10N$ К и давлении $p_2 = 0{,}1N$ Па.

1.4.7. Найти среднюю квадратичную скорость молекул газа, имеющего плотность $\rho = \left(1 + 0{,}1(k + 1)\right) \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ при давлении $p = 0{,}1N$ атм.

1.4.8. Определить массу воздуха и полную энергию молекул воздуха, заключенного в пространстве между оконными рамами при давлении 1атм, если температура линейно меняется от $t_1 = -10$°С (у наружного стекла) до $t_2 = +20$°С (у внутреннего). Площадь рамы $S = (k + 1)\ \text{м}^2$, расстояние между рамами $l = 0{,}01N$ м.

1.4.9. Найти относительное число ($\frac{\Delta N}{N}$) молекул водорода, скорости которых отличаются от наиболее вероятной не более чем на $\Delta v = (k + 1)\frac{\text{м}}{\text{с}}$ при температуре $t = 10N$ °С.

1.4.10. На пути молекулярного пучка находится “зеркальная” стенка, движущаяся навстречу молекулам с постоянной скоростью $v_1 = 10N\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Найти давление, испытываемое стенкой, если скорость молекул в пучке $v_2 = 100(k+1)\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, концентрация молекул $n = 3 \cdot 10^{22}\text{м}^{-3}$, масса молекулы $m = 6 \cdot 10^{-26}$ кг. Стенка перпендикулярна плоскости пучка.

1.4.11. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено водородом при нормальном давлении $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па и температуре $t_1 = (k+1)$℃ . Радиусы цилиндров равны, соответственно, $R_1 = 10$ см и $R_2 = 10{,}5$ см. Внешний цилиндр приводят во вращение с частотой $n = 15\frac{\text{об}}{\text{с}}$. Какой момент надо приложить к внутреннему цилиндру, чтобы он оставался неподвижным? Длина цилиндров $L = 10\ N$ см, диаметр молекул водорода $d = 2{,}3 \cdot 10^{-10}$ м. Положить, что направленная скорость молекул в пространстве между цилиндрами меняется линейно.

1.4.12. Определить массу столба воздуха высотой h=100N м и сечением $S = (k+1)\ \text{м}^2$, если плотность воздуха у поверхности Земли $\rho_0 = 1.2\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, а давление $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па. Температуру воздуха считать постоянной.

1.4.13. В баллоне был некоторый газ. При выпуске из баллона части газа его температура уменьшилась в $n = 20\ N$ раз, а давление – в $m = (k+1)$раз Какая часть газа выпущена? В каком соотношении должны находиться n и m?

1.4.14. Расстояние между катодом и анодом в разрядной трубке $L = (10+k)$ см. Какое давление воздуха надо создать в трубке, чтобы электроны на пути от катода к аноду не испытывали столкновений? Температура воздуха $t = (10+N)$℃, диаметр молекул воздуха d = $3 \cdot 10^{-10}$ м. Средняя длина свободного пробега электрона в газе примерно в 5,7 раза больше, чем средняя длина свободного пробега молекул газа.

1.4.15. Пылинка массой $m = (k+1)10^{-19}$ г взвешена в воздухе. Определить толщину слоя воздуха, в пределах которого концентрация пылинок различается не более чем на 1%. Температура воздуха постоянна и равна $T = (275+N)$ К.

1.4.16. Для получения хорошего вакуума в стеклянном сосуде необходимо прогревать стенки сосуда при откачке с целью удаления адсорбированного газа. Определить, на сколько может повыситься давление в сферическом сосуде радиусом $R = (k + 1)$ см, если адсорбированные молекулы перейдут со стенок в сосуд. Площадь поперечного сечения молекуы считать $S = 10^{-15}\ \text{см}^2$, слой мономолекулярный. Температура $t = (275 + N)$ °С.

1.4.17. Находящийся между стенками дюарового сосуда воздух при температуре $t_1 = 16$ °С оказывает давление $p = (3 + 0{,}01N)10^{-4}$ Па. Найти давление на стенки сосуда и концентрацию молекул между стенками сосуда, если в сосуд залить жидкий воздух при температуре $t_2 = -180$ °С. Температура внешних стенок неизменна. Расстояние между стенками $l = 1{,}1 + 0{,}1k\ \text{см}$. Диаметр молекулы воздуха $d = 3 \cdot 10^{-8}$ см.

1.4.18. При опытном определении числа Авогадро по методу Перрена было найдено, что при увеличении высоты наблюдаемого слоя жидкости на $h = (12{,}75 + 0{,}01N)$ мкм концентрация частичек гуммигута уменьшается вдвое. Определить радиус частичек, если температура опыта $t = (10 + k)$°С плотность гуммигута $\rho_1 = 1{,}2 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, плотность жидкости $\rho_2 = 0{,}9 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

1.4.19. Сколько жидкого воздуха испарится за 1 час из плохо откачанного дюарового сосуда, если поверхность стенок сосуд $S = (575 + N)\ \text{см}^2$, расстояние между стенками $l = 1\ \text{см}$, температура жидкого воздуха $t_1 = -180$ °С, температура наружных стенок $t_2 = (10 + k)$°С. Теплота испарения жидкого воздуха $\Lambda = 202\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг}}$. В пустом сосуде, т.е. когда температура обеих стенок t_2, давление воздуха между стенками $p_0 = 0{,}13\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$. Диаметр молекул воздуха $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м.

1.4.20. Бак в виде прямоугольного параллелепипеда движется в направлении, перпендикулярном одной из его стенок и параллельном его длинному ребру $l = 10$ м. Найти разность плотностей $\Delta\rho$ воздуха в баке у его задней и передней стенок, если бак находится достаточно долго в движении, т.е. все части газа движутся с одинаковым ускорением $a = (2 + 0{,}1k)\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Плотность покоящегося газа $\rho_0 = (4 + 0{,}01N)\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, температура Т = 300 К. Силой тяжести газа пренебречь. $\mu_\text{в} = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$.

1.4.21. В закрытом баллоне объемом $V = (100 + N)$ л была смесь кислорода и водорода в количествах $\mathrm{M}_1 = 16$ кг и $\mathrm{M}_2 = 1$ кг соответственно. В результате реакции весь водород вступил в соединение с кислородом. Температура при этом возросла от $T_1 = 290\ K$ на $\Delta T = 10(k + 1)\ K$. Каковы давления смеси газов до и после реакции, если конденсации водяных паров не произошло?

1.4.22. В вертикальном замкнутом цилиндре сечением $S = 10\ \text{см}^2$ находится газ с молярной массой $\mu = 44\ \frac{\text{г}}{\text{моль}}$. Способный перемещаться без трения поршень массой $m = (20 + k)$ кг делит объем, занимаемый газом, на две части $V_1 = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3$ и $V_2 = 8 \cdot 10^{-3} \text{м}^3$. Температура всей системы неизменна и равна $T = (273 + N)\ K$. Зная, что период колебаний поршня τ=1 с, найти массу газа в цилиндре, считая, что над и под поршнем массы газа одинаковы.

1.4.23. Барометр в кабине летящего самолета показывает все время одинаковое давление $p = (70 + k)$ кПа, из-за чего летчик считает высоту полета постоянной. Однако температура воздуха за бортом самолета изменилась с $t_1 = (4{,}75 + 0{,}01N)$°C до $t_2 = 1$ °C . Какую ошибку Δh в определении высоты допустил летчик? Давление у поверхности Земли $\mathrm{p}_0 = 101$ кПа.

1.4.24. В блюдце налито $m = (20 + (k + 1))$ г воды, а сверху на воду поставлен перевернутый вверх дном разогретый цилиндрический стакан с тонкими стенками. До какой наименьшей температуры должен быть нагрет стакан, чтобы после остывания его до температуры окружающего воздуха T=300 К в него оказалась бы втянутой вся вода? Атмосферное давление $\mathrm{p}_0 = 10^5$ Па, площадь сечения стакана $S = (20 + 0{,}01N)\ \text{см}^2$, высота h=10 см Принять g = 10 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Испарением, поверхностным натяжением, расширением стакана пренебречь.

1.4.25. Найти кинетическую энергию поступательного движения и полную энергию всех молекул кислорода в объеме $V = N$ л при давлении $p = (k + 1)10^5\ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$.

1.5. Термодинамика

Первый закон (начало) термодинамики:

$$dQ = dU + dA,$$

здесь $dQ = cMdT$ - количество тепла, передаваемое термодинамической системе (газу) массой M и удельной теплоемкостью c; $dU = \frac{M}{\mu}\frac{i}{2}RdT$ – изменение внутренней энергии системы; $dA = pdV$ - работа, совершаемая системой.

Уравнение политропного процесса

$$pV^n = const,$$

где n – показатель политропы.

Работа при изопроцессах:

а) изотермический ($T = const$):

$$\Delta A_{12} = \frac{M}{\mu} RT ln \frac{V_2}{V_1},$$

б) изохорный ($V = const$):

$$\Delta A = 0,$$

в) изобарный ($p = const$):

$$\Delta A_{12} = p(V_2 - V_1),$$

г) адиабатный ($\Delta Q = 0$):

$$\Delta A_{12} = \frac{M}{\mu}\frac{RT_1}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right),$$

д) политропный ($c = const$):

$$\Delta A_{12} = \frac{M}{\mu}\frac{RT_1}{n - 1}\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right).$$

Изменение энтропии системы:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

Связь между энтропией и вероятностью:

$$S = k\, lnW,$$

здесь k — постоянная Больцмана; W — термодинамическая вероятность.

Коэффициент полезного действия тепловой машины (общий случай):

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

здесь Q_1 — количество тепла, полученное рабочим телом от нагревателя; Q_2 — количество тепла, отданное холодильнику.

Для тепловой машины, работающей по циклу Карно:

$$\eta_{к} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 — температура нагревателя; T_2 — температура холодильника.

Основное уравнение термодинамики:

$$TdS = dU + dA.$$

1.5.1. Кислород объемом $V_1 = N$ л находится при температуре $T_1 = (280 + 10N)$ К и давлении $p_1 = 7(k+1)10^5$ Па. Затем кислород вначале расширяют адиабатически до объема $V_2 = 3N$ л, а потом изотермически до объема $V_3 = 5N$ л и ,наконец, изотермически до объема $V_4 = 7N$ л. Найти конечные давление p_4 и температуру T_4.

1.5.2. Идеальный газ, содержащий количество вещества $\nu = 1$ моль, при давлении $p_1 = 10N$ кПа занимает объем $V_1 = (k+1)$ л. Сначала газ изохорно нагревают до температуры 400 К. Далее, изотермически расширяя, доводят его до первоначального давления. После этого путем изобарного сжатия возвращают газ в первоначальное состояние. Определить К.П.Д. получившегося цикла. Газ двухатомный.

1.5.3. Воздух массой $M = (k+1)$ кг, находящийся при температуре $t_1 = (25+N)$°C и давлении $p_1 = 1{,}5$ атм, расширяется адиабатически. Давление при этом падает до $p_2 = 1$атм. Найти: а) степень расширения (V_2/V_1); б) конечную температуру; в) работу расширения газа. $\gamma = 1{,}4;\ \mu = 29\frac{\text{г}}{\text{моль}}$.

1.5.4. При давлении $p_1 = (k+1)10^5$ Па и температуре $t_1 = (200+N)$°C 1кг воздуха изотермически расширяется так, что $\frac{p_1}{p_2} = 4$, затем адиабатически сжимается и изобарически возвращается в первоначальное состояние. Найти работу цикла. ($\gamma = 1{,}4;\ \mu = 29\frac{\text{г}}{\text{моль}}$).

1.5.5. В закрытом сосуде объемом $V = (k+1)$ л находится воздух при давлении $p_1 = N \cdot 10^5$ Па. Какое количество тепла надо сообщить воздуху, чтобы повысить давление в сосуде в 3 раза? ($\mu = 29\ \frac{\text{г}}{\text{моль}};\ \gamma = 1{,}4$).

1.5.6. N г водорода изотермически расширяется так, что объем увеличивается в $(k+2)$ раза. Затем он адиабатически сжимается до первоначального объема. Начальная температура $T_1 = 100\sqrt{N}$ К. Изобразить процесс на диаграмме p, V. Найти: а) конечную температуру; б) количество тепла, сообщенное газу; в) совершенную газом работу.

1.5.7. Цикл состоит из двух изотерм и двух изохор. Определить К.П.Д. цикла. Во сколько раз это К.П.Д. меньше К.П.Д. цикла Карно при тех же параметрах: $T_1 = (k+2)10^2 K; V_1 = N$ л; $T_2 = N(k+2)10^2 K; V_2 = N(k+2)$л. Газ двухатомный.

1.5.8. Трехатомный газ совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Определить работу, совершенную газом, количество тепла, сообщенное газу и К.П.Д. цикла при $V_1 = N$ л, $p_1 = (k+2)10^4$ Па, $V_2 = (k+2)N$ л, $p_2 = (k+2)N10^4$ Па.

1.5.9. $(k+1)$ киломолей CO_2 совершают цикл Карно при изменении температуры от $T_2 = 100\sqrt{N}\ K$ до $T_1 = 100N\ K$. В течение этого цикла давление меняется от p_{max} до p_{min} в $10(k+1)$ раз. Определить: а) К.П.Д. цикла; б) количество тепла, полученного от нагревателя; в) работу, совершенную газом за цикл.

1.5.10. В одном сосуде объемом $V_1 = N$ л находится $M_1 = 10N$ г диоксида углерода (CO_2), в другом – с $V_2 = (k+1)N$ л находится $M_2 = 5(k+1)N$ г азота. Температуры газов одинаковы. Сосуды соединяют и газы перемешиваются. Найти изменение энтропии при этом процессе.

1.5.11. Тепловая машина совершает цикл, состоящий из двух изотерм и двух изобар. При этом давление меняется в 10$(k+1)$ раз. Цикл протекает при температурах $T_1 = 100N$ К и $T_2 = 100\sqrt{N}$ К. В качестве рабочего тела используется $2(k+1)$ киломолей водорода. Определить К.П.Д. цикла, совершаемую газом работу и количество тепла, сообщенное газу.

1.5.12. Лед массой $m = 0{,}1N$ кг имеет температуру $T_1 = \left(200 + 10\sqrt{N}\right)K$. Какую он должен иметь скорость при столкновении с массивным предметом (масса предмета $M \gg m$), чтобы полностью превратиться в пар с температурой Т = 373 К. Принять, что $\eta = 10(k+1)\%$ кинетической энергии льда переходит в тепло. Определить изменение энтропии, считая, что теплоемкости льда и воды не зависят от температуры. Давление 1 атм.

1.5.13. Используя данные задачи 1.5.1., определить суммарную работу, совершенную газом, полное изменение его внутренней энергии и количество тепла подведенного к газу.

1.5.14. При давлении $p_1 = (2 + 10^{-2}N)10^5$ Па 1кг газа имеет плотность $\rho_1 = (k+11)10^{-2}\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. Газ изотермически расширился, и плотность его уменьшилась в два раза. Найти работу, совершенную газом.

1.5.15. В вертикально расположенном изолированном цилиндре под поршнем находится воздух. Какую работу надо произвести, чтобы поднять поршень на высоту $h_1 = (k+1)$ см, если начальная высота столба $h_0 = 15$ см, атмосферное давление $p_0 = 1$ атм, площадь поршня $S = (9{,}75 + 10^{-2}N)$ см^2. Массой поршня пренебречь. Температура воздуха под поршнем постоянна.

1.5.16. Тепловая машина работает по циклу Карно. Температуры нагревателя и холодильника $t_1 = (375 + N)$℃ и $t_2 = 5(k+1)$℃ соответственно. Время, за которое совершается цикл $\tau = 1$ с. Найти мощность двигателя, работающего по этому циклу, если известно, что рабочим телом служит воздух массой $M = 2\text{кг}$ ($\mu = 29\ \frac{\text{г}}{\text{моль}}$), а давление в конце изотермического расширения равно давлению в начале адиабатного сжатия. Является цикл обратимым или нет?

1.5.17. Работа изотермического расширения водорода $M = (k+1)$ кг от объема V_1 до $V_2 = 2V_1$ равна $A = (300 + 10N)$ Дж. Определить среднюю квадратичную скорость молекул газа и его температуру.

1.5.18. В цилиндрах двигателя внутреннего сгорания с изохорным подведением теплоты рабочая смесь сжимается политропически с показателем политропы n = 1,3. Найти: а) максимально допустимую степень сжатия ($\frac{V_1}{V_2}$); б) расход топлива двигателем за 1 час работы, если начальная температура рабочей смеси $t_1 = (25 + N)$°C, а температура в конце сжатия не должна превышать $t_2 = 400$°C . Теплота сгорания топлива $q = 45\ \frac{\text{МДж}}{\text{кг}}$, мощность двигателя $P = (10 + k)$ кВт. Потери на трение и наружное охлаждение не учитывать. Принять К.П.Д. цикла двигателя равным К.П.Д. цикла Карно.

1.5.19. Воздух расширяется по политропическому закону, и его объем увеличивается в 7 раз. После расширения давление $p_2 = (2 + 10^{-2}N)10^5$ Па и температура $T_2 = (330 + k)$ К. Определить первоначальную температуру и удельный объем (объем единицы массы). Показатель политропы $n = 1{,}32$.

1.5.20. При расширении $M = (k+1)$ кг кислорода по политропическому процессу (n = 2) его объем от $V_1 = 2\ \text{м}^3$ до $V_2 = 4{,}4\ \text{м}^3$. Определить изменение внутренней энергии и количество поглощенного тепла, если давление газа до расширения было $p_1 = (2 + 10^{-2}N)10^5$ Па. Считать $c_v = 652\ \frac{\text{Дж}}{\text{кгК}}$.

1.5.21. Некоторый газ имеет удельную теплоемкость при постоянном объеме $c_v = (600 + N)\frac{\text{Дж}}{\text{кгК}}$. Отношение теплоемкостей $\frac{c_p}{c_v} = 1{,}33$. Определить удельную теплоемкость политропного процесса, если показатель политропы $n = (1{,}4 + 10^{-2}k)$.

1.5.22. Кислород массой $M = 32(k+1)$ кг изотермически расширяется так, что $\frac{p_1}{p_2} = (1{,}75 + 10^{-2}k)$. Определить логарифм термодинамического отношения вероятностей конечного и начального состояний газа, а также изменение энтропии.

1.5.23. При температуре $t_1 = (200 + k)$ °C и давлении p=(7+$N10^{-2}$)10^5Па

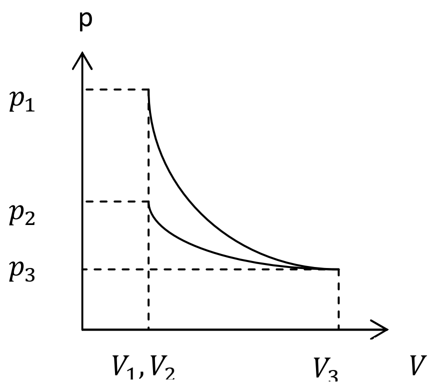

Рис. 1.18.

воздух массой $M = 2{,}7$кг расширяется адиабатически (γ=1,4). Эта же масса воздуха расширяется изотермически (рис. 1.18.). Определить параметры состояния, соответствующего пересечению адиабаты и изотермы, если известно, что $p_2 = 4{,}2 \cdot 10^5$ Па.

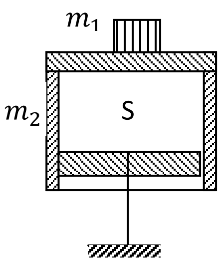

Рис.1.19.

1.5.24. Цилиндр с теплоизолированными стенками закрыт снизу поршнем из плохо проводящего материала и может свободно перемещаться по поршню (рис.1.19.). На цилиндр резко кладут гирю массой $m_1 = N$ кг и он перемещается вниз. Найти изменение внутренней энергии и температуру воздуха внутри цилиндра в состоянии равновесия. Масса цилиндра m_2=($k + 1$) кг, площадь поршня $S = 10$ см^2. Первоначальный объем воздуха в цилиндре $V_1 = N$ л. Окружающая среда имеет давление $p_0 = 1{,}013\ 10^5$ Па и температуру $t_0 = 0$°C. Положить $c_p/c_v = 1{,}4$. Воздух – смесь двухатомных газов.

1.5.25. Сероводород (H_2S) массой $M = (k + 1)$ кг, занимающий объем $V_1 = 3$м^3 при $t_1 = N$°C, сжали адиабатически так, что его давление увеличилось вдвое. Определить конечные объем и температуру, а также изменение внутренней энергии газа.

ЛИТЕРАТУРА

Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. – СПб. «Лань», 2007.

Орир Дж. Физика. Т.1. –М. «Мир», 1981.

Фиргант Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики: Учебное пособие для втузов. –М. «Высш. шк.», 1978.

Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. –М. «Наука», 1982.

Коломыцев Б.М., Михайлов Н.М., Страхов Н.Б. Сборник индивидуальных задач по курсу общей физике. –Л. «ЛЭТИ», 1991.